

PHÂN TÍCH ĐỘ NHẠY TRONG CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU

SENSITIVITY ANALYSIS IN OPTIMALITY PROBLEMS

LÊ DÂN

Trường Đại học Kinh tế, Đại học Đà Nẵng

TÓM TẮT

Những mô hình tối ưu ngày càng được sử dụng phổ biến trong phân tích kinh tế. Bài viết này trình bày việc phân tích độ nhạy được sử dụng như thế nào trong các bài toán qui hoạch tuyến tính. Bài viết nêu rõ những tình huống và vai trò của phân tích độ nhạy trong kinh tế; phân tích sự thay đổi các hệ số trong hàm mục tiêu, về phải ảnh hưởng như thế nào đến phương án tối ưu. Nêu các qui tắc về sự thay đổi những tham số mô hình đến tính tối ưu của bài toán.

ABSTRACT

Optimality models are widely used in economic analysis. This paper introduces the issue of sensitivity analysis in a linear programming and its roles in economic problems. This paper also discusses how a change in an objective function coefficient or a change in the right-hand-side for a constraint will affect the optimal solution. In this way, the rules of how changes in the coefficients of a linear programming problem affect the optimal solution are summarized.

1. Đặt vấn đề

Các bài toán qui hoạch tuyến tính ngày càng được sử dụng rộng rãi trong phân tích kinh tế nhằm tìm phương án tối ưu khi ra quyết định. Tuy nhiên, nguồn số liệu phục vụ cho việc xây dựng bài toán qui hoạch tuyến tính luôn thay đổi. Trong bài toán qui hoạch, hệ số hàm mục tiêu và về phải chính là những lợi nhuận biên, chi phí biên hay là nguồn lực như vốn, lao động... Những yếu tố này thường thay đổi hay vì lý do hạch toán mà độ chính xác của số liệu không đáng tin cậy hoàn toàn. Liệu những thay đổi này có ảnh hưởng như thế nào đến phương án tối ưu hay bài toán có còn tối ưu hay không. Trong trường hợp nào chúng ta phải giải lại bài toán và trường hợp nào chúng ta không phải giải lại bài toán mà tận dụng bài toán cũ. Bằng công cụ phân tích độ nhạy cho phép chúng ta trả lời những câu hỏi này một cách đáng tin cậy.

Phân tích độ nhạy là nghiên cứu sự thay đổi của những hệ số trong bài toán qui hoạch tuyến tính ảnh hưởng đến phương án tối ưu. Dùng phân tích độ nhạy, chúng ta có thể trả lời những câu hỏi sau:

- Hệ số trong hàm mục tiêu thay đổi sẽ ảnh hưởng như thế nào đến phương án tối ưu?
- Giá trị của về phải của các ràng buộc thay đổi sẽ ảnh hưởng như thế nào đến phương án tối ưu?
- Trong nguồn lực sản xuất, nhân tố nào quan trọng hơn?

Bởi vì phân tích độ nhạy quan tâm đến những thay đổi này ảnh hưởng đến phương án tối ưu nên phân tích độ nhạy chỉ bắt đầu sau khi phương án tối ưu của bài toán gốc được xác định. Chính vì vậy, phân tích độ nhạy thường được gọi là phân tích hậu tối ưu (postoptimality analysis). Phân tích độ nhạy rất quan trọng trong việc ra quyết định vì các bài toán tồn tại trong môi trường thay đổi. Phân tích độ nhạy cung cấp những thông tin cần thiết ứng với những thay đổi đó.

Chúng ta có thể thực hiện phân tích độ nhạy bằng phương pháp đồ thị hay bằng bảng đơn hình. Theo hướng ứng dụng, bài viết này không muốn đi sâu về lý luận phân tích độ nhạy.

Nhằm triển khai ý tưởng thực hiện phân tích độ nhạy, chúng ta xem xét bài toán tối ưu như sau: Công ty hóa chất sử dụng 3 loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất 2 sản phẩm I và II. Định mức chi phí nguyên liệu cho việc sản xuất sản phẩm như sau:

Nguyên liệu	Định mức chi phí		Khả năng cung ứng
	Sản phẩm I	Sản phẩm II	
A	0,4	0,5	20
B		0,2	5
C	0,6	0,3	21

Lợi nhuận biên cho mỗi sản phẩm I, II tương ứng là 40 và 30 ngàn đồng cho mỗi kg.

Công ty cần sản xuất mỗi loại bao nhiêu kg để cực đại lợi nhuận?

Chúng ta ký hiệu: x_1, x_2 tương ứng là khối lượng sản phẩm I, II được sản xuất.

Với số liệu của như vậy, mô hình bài toán qui hoạch tuyến tính sẽ có dạng:

$$\text{Max } (40x_1 + 30x_2)$$

Ràng buộc

$$0,4 x_1 + 0,5 x_2 \leq 20 \quad \text{Nguyên liệu A}$$

$$0,2 x_2 \leq 5 \quad \text{Nguyên liệu B}$$

$$0,6 x_1 + 0,3 x_2 \leq 21 \quad \text{Nguyên liệu C}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Phân tích sự thay đổi các hệ số của hàm mục tiêu và qui tắc 100%

Trong kinh tế, có nhiều nguyên nhân làm cho hệ số của hàm mục tiêu thay đổi. Trong các bài toán Max, hàm mục tiêu thường đo lường về kết quả như lợi nhuận, doanh thu, giá trị sản xuất... và các hệ số của hàm mục tiêu chính là lợi nhuận biên, doanh thu biên... Trong các bài toán Min, hàm mục tiêu thường đo lường về chi phí và hệ số hàm mục tiêu chính là các chi phí biên... Trong nền kinh tế thị trường các nhân tố như giá cả, định mức, công nghệ, năng suất thay đổi thì các hệ số này sẽ thay đổi theo. Liệu có phải mỗi sự thay đổi này đều phải tiến hành giải lại bài toán qui hoạch để xác định phương án tối ưu hay không? Chúng ta cần xác định trong những trường hợp nào thì không phải giải lại hay phải giải lại toàn bộ bài toán. Thực sự phân tích độ nhạy không chỉ hữu ích khi có sự thay đổi của số liệu mà còn bao gồm cả trường hợp số liệu không chính xác. Phân tích độ nhạy chỉ rõ trường hợp nào chúng ta không cần số liệu chính xác và trường hợp nào thì không.

Bởi vì phân tích độ nhạy quan tâm đến những thay đổi này ảnh hưởng đến phương án tối ưu nên phân tích độ nhạy chỉ bắt đầu sau khi phương án tối ưu của bài toán gốc được xác định. Chính vì vậy, phân tích độ nhạy thường được gọi là phân tích hậu tối ưu (postoptimality analysis).

Để thực hiện phân tích độ nhạy, chúng ta có sử dụng phương pháp đồ thị và phương pháp đơn hình. Phương pháp đồ thị rất trực quan nhưng chỉ thực hiện cho bài toán hai biến còn phương pháp đơn hình tổng quát và đáp ứng cho những bài toán qui mô lớn hơn. Trong bài viết này sử dụng phương pháp đơn hình.

Bảng đơn hình cuối cùng của bài toán khi giải bằng phương pháp đơn hình sẽ là:

Biến cơ bản	Hệ số	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	Phương án
		40	30	0	0	0	
x ₁	30	0	1	10/3	0	-20/9	20
x ₄	0	0	0	-2/3	1	4/9	1
x ₂	40	1	0	-5/3	0	25/9	25
		0	0	100/3	0	400/9	1600

Giả sử hệ số của hàm mục tiêu ứng với biến x₁ bây giờ là c₁. Khi đó, chúng ta tiến hành tính toán lại Δ₃, Δ₅ như sau:

$$\Delta_3 = \frac{10}{3}c_1 - \frac{200}{3} \quad \Delta_5 = -\frac{20}{9}c_1 - \frac{1000}{9}$$

Vì bài toán Max nên để bài toán tối ưu thì Δ₃, Δ₅ ≥ 0. Vậy: 20 ≤ c₁ ≤ 50.

Giả sử hệ số của hàm mục tiêu ứng với biến x₂ bây giờ là c₂. Tương tự, chúng ta có kết quả như sau: 24 ≤ c₂ ≤ 60.

Khi giải chúng ta giả định chỉ có một số thay đổi nhưng trong thực tế có thể xảy ra sự biến đổi đồng thời. Khi đó, chúng ta sử dụng qui tắc 100%.

Qui tắc 100%: Tất cả các hệ số của hàm mục tiêu thay đổi, tính tổng % tăng cho cho phép và % giảm cho phép. Nếu tổng % không lớn hơn 100, phương án tối ưu không thay đổi.

Qui tắc 100% không nói rằng phương án tối ưu sẽ thay đổi nếu tổng % tăng cho phép và giảm cho phép hơn 100%.

Chú ý: Việc giải những bài toán qui mô lớn hơn nên sử dụng các phần mềm máy tính để giải vì các phần mềm đều hỗ trợ phân tích độ nhạy.

3. Phân tích sự thay đổi các số hạng về bên phải và qui tắc 100%

Trong các bài toán qui hoạch tuyến tính ứng dụng trong kinh tế, các số hạng về bên phải thường đo lường về nguồn lực như vốn, thời gian, lao động, máy móc thiết bị... Trong khi hoạt động sản xuất, các nguồn lực này có thể bị thay đổi do nhiều nhân tố khác nhau như mới huy động thêm hay bị mất mát... Ngoài ra, độ chính xác của tài liệu báo cáo phục vụ cho bài toán cũng cần được quan tâm khi thiết lập mô hình. Sự thay đổi này có làm thay đổi tính tối ưu của bài toán hay không? Hơn nữa, chúng ta cần biết nguồn lực nào quan trọng để đưa ra quyết định nên bổ sung nguồn nào. Nhằm đáp ứng nhu cầu này, có thể sử dụng phân tích độ nhạy để xem xét sự thay đổi về bên phải.

Cách tiếp cận phân tích sự thay đổi về bên phải ảnh hưởng như thế nào đến tính tối ưu của bài toán phức tạp hơn so với phân tích sự thay đổi của hệ số hàm mục tiêu.

Bài viết này trình bày một cách tiếp cận mới qua bài toán đối ngẫu của bài toán gốc. Rõ ràng bài toán đối ngẫu sẽ chuyển về bên phải của bài toán gốc thành hệ số của hàm mục tiêu. Nhờ đó, phân tích về bên phải của bài toán gốc thành phân tích sự thay đổi hệ số của hàm mục tiêu. Như vậy, bước đầu tiên là phải chuyển bài toán gốc thành bài toán đối ngẫu. Với bài toán gốc như trên, chúng ta chuyển thành bài toán đối ngẫu như sau:

$$\begin{aligned} & \text{Min } (20y_1 + 5y_2 + 21y_3) \\ & \text{Ràng buộc} \\ & \quad 0,4y_1 + \quad \quad 0,6y_3 \geq 40 \\ & \quad 0,5y_1 + 0,2y_2 + 0,3y_3 \geq 30 \end{aligned}$$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
 Dùng phương pháp đơn hình để giải và có bảng đơn hình cuối cùng sẽ là:

Biến cơ bản	Hệ số	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	Phương án
		20	5	21	0	0	M	M	
Y_3	21	0	-4/9	1	-25/9	20/9	25/9	-20/9	400/9
Y_1	20	1	2/3	0	5/3	-10/3	-5/3	10/3	100/3
		0	-1	0	-25	-20	25-M	20-M	1600

Với kết quả, phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là: $y_1=100/3$, $y_2=0$ và $y_3=400/9$; giá trị hàm mục tiêu sẽ là 1600 ngàn đồng.

Giả sử hệ số của hàm mục tiêu ứng với biến y_1 bây giờ là b_1 . Khi đó, chúng ta tiến hành tính toán lại $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_5$ như sau:

$$\Delta_2 = \frac{2}{3}b_1 - \frac{43}{3} \quad \Delta_4 = \frac{5}{3}b_1 - \frac{175}{3} \quad \Delta_5 = -\frac{10}{3}b_1 - \frac{140}{3}$$

Vì bài toán Min nên để bài toán tối ưu thì $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_5 \leq 0$. Vậy: $14 \leq b_1 \leq 21,5$.

Giả sử hệ số của hàm mục tiêu ứng với biến y_3 bây giờ là b_3 . Tương tự, chúng ta có kết quả như sau: $18,75 \leq b_3 \leq 30$.

Giả sử hệ số của hàm mục tiêu ứng với biến y_2 bây giờ là b_2 . Tương tự, chúng ta có kết quả như sau: $4 \leq b_2$.

Theo như kết quả nghiên cứu này, các hệ số của của hàm mục trong bài toán đối ngẫu thay đổi trong phạm vi đã chỉ ra thì phương án tối ưu không đổi. Từ đó, chúng ta có suy ra kết quả biến đổi ở vế phải của bài toán gốc trong phạm vi đã nêu thì bài toán gốc vẫn tối ưu. Những giá trị của phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu, trong phân tích độ nhạy gọi là Shadow Price hay Dual Price.

Dựa vào kết quả của bài toán đối ngẫu, chúng ta nhận thấy khi vế phải ứng với ràng buộc thứ i của bài toán gốc tăng lên 1 đơn vị thì giá trị của hàm mục tiêu của bài toán gốc tăng lên một lượng bằng giá trị của biến thứ i trong phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (các giá trị Shadow Price tương ứng).

Qua kết quả, chúng ta có thể đưa ra một số kết luận:

- Khi thay đổi giá trị của vế phải của bài toán gốc trong phạm vi cho phép sẽ làm cho hàm mục tiêu bài toán gốc thay đổi một lượng ứng với biến tương ứng trong phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

- Qua nghiên cứu sự thay đổi vế phải, chúng ta có thể đánh giá tầm quan trọng của từng nhân tố vế phải trong việc làm thay đổi giá trị hàm mục tiêu. Nhờ đó, với nguồn lực có hạn, các nhà quản trị có thể tiến hành phân bổ lại nhằm nâng cao hiệu quả sử dụng nguồn lực.

- Khi vế phải thay đổi trong phạm vi đã chỉ, chúng ta không cần giải lại bài toán mà sử dụng kết quả của bài toán cũ để xác định phương án tối ưu và giá trị hàm mục tiêu của bài toán đã điều chỉnh.

- Trong thực tế khi có sự thay đổi đồng thời các số hạng vế phải thì sẽ như thế nào? Trong trường hợp này, chúng ta sử dụng qui tắc 100%.

Qui tắc 100%: Nếu tổng % tăng và % giảm của các số hạng vế phải không quá 100% thì bài toán vẫn tối ưu, các giá trị Shadow Price vẫn còn hợp lệ.

3. Kết luận

Trong phân tích kinh tế, nhu cầu phân tích độ nhạy rất lớn vì nó cung cấp thông tin rất đa dạng cho nhà quản trị. Với phân tích độ nhạy giúp giải quyết những vấn đề cơ bản sau:

- Khi độ chính xác của tài liệu không đảm bảo thì nhà quản trị có phải quá lo lắng về tính tối ưu của bài toán hay không?

- Trong điều kiện dữ liệu của bài toán qui hoạch luôn thay đổi do giá cả, định mức, năng suất lao động, nhu cầu khách hàng, thị trường, nguồn lực luôn thay đổi thì bài toán qui hoạch sẽ như thế nào?

- Khi nguồn lực thay đổi ở mức độ nào thì nhà quản trị không phải giải lại bài toán qui hoạch mà có thể sử dụng bài toán cũ để tìm phương án tối ưu và giá trị hàm mục tiêu của bài toán đã điều chỉnh;

- Khi nguồn lực thay đổi ở mức độ nào thì nhà quản trị phải giải lại bài toán qui hoạch để tìm phương án tối ưu và giá trị hàm mục tiêu của bài toán đã điều chỉnh;

- Biết rõ nguồn lực nào là quan trọng khi tham gia vào quá trình sản xuất;

- Trong trường hợp nguồn lực có hạn cần có sự lựa chọn đầu tư thì nhà quản trị biết phải lựa chọn đầu tư cho yếu tố nào nhằm nâng cao hiệu quả.

- Để thực hiện giải bài toán qui hoạch tuyến tính và quan tâm đến phân tích độ nhạy, chúng ta cần sử dụng các phần mềm máy tính. Hiện nay có nhiều phần mềm như vậy. Trong EXCEL có công cụ SOLVER hay EXCEL QM có thể thực hiện giải các bài toán qui hoạch nhỏ. Hoặc một số phần mềm độc lập khác như WINQSP, QM FOR WINDOWS... Đối với những bài toán lớn có thể sử dụng phần mềm LINGO.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Phan Quốc Khánh (2002), *Vận trù học*, NXB Giáo dục, Tp.Hồ Chí Minh.
- [2]. Glyn Burton, George Carroll, Stuart Wall (2002), *Quantitative Methods for Business and Economics*, 2nd Edition, Thomson.
- [3]. Frank Dewhurst (2001), *Quantitative Methods for Business & Management*, UMIST, UK.
- [4]. Barry Render, Ralph M. Stair, JR. (2001), *Quantitative Analysis for Management*, Seventh Edition, Prentice Hall International, Inc.
- [5]. S. Christian Albright, Wayne L. Winston, *Practical Management Science (with CD-ROM Update): Spreadsheet Modeling and Applications*, 2nd edition, Thomson.