

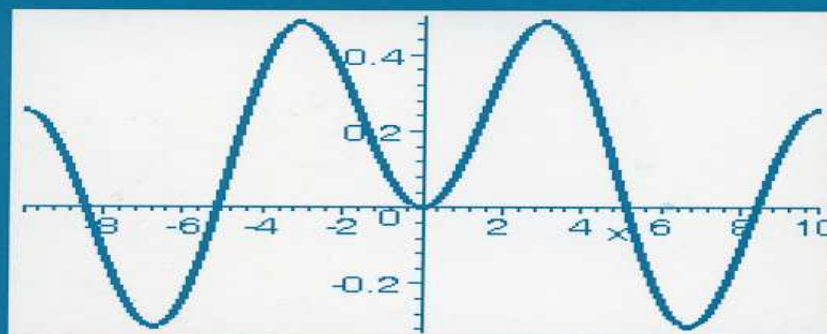
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM
TỦ SÁCH ĐẠI HỌC

NGUYỄN PHÚ VINH (chủ biên)

TOÁN CAO CẤP

A1 - C1

KHOẢNG CÔNG NGHỆ VÀ KINH TẾ



$$J_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^{2n+1} (2+n) n}$$

LƯU HÀNH NỘI BỘ - 2010

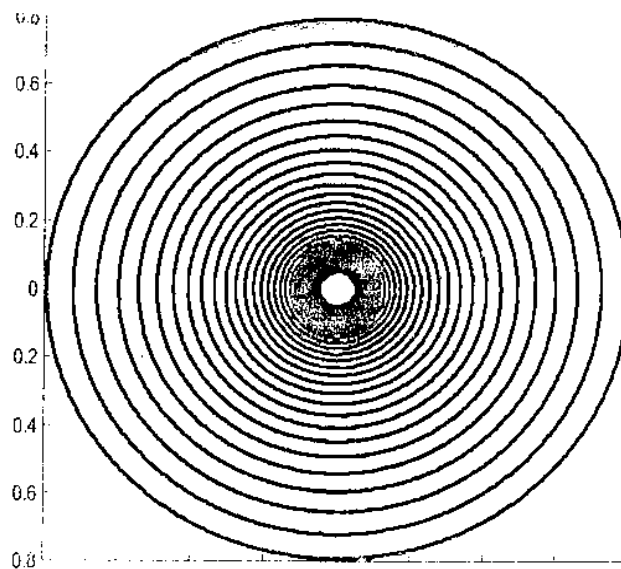
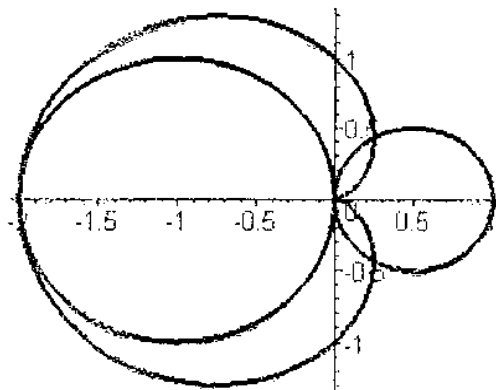
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM
TS. NGUYỄN PHÚ VINH

TOÁN CAO CẤP

A1-C1

(HÀM MỘT BIẾN)

KHOẢNG CÔNG NGHỆ VÀ KINH TẾ



Lưu hành nội bộ - 2010

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình "**Toán cao cấp**" năm thứ nhất, được biên soạn dựa trên đề cương do Bộ Giáo Dục và Đào Tạo qui định bắt buộc cho sinh viên các ngành **Công nghiệp** và **Kinh tế** của Trường Đại học Công nghiệp Tp.HCM.

Giáo trình được viết chung cho cả hai khối kinh tế và công nghệ, nên khi giáo viên dạy khối nào thì đã có chương trình chi tiết cho từng khối lớp tương ứng, giáo viên đứng lớp sẽ thông báo cụ thể đến sinh viên điều này. Vả lại sinh viên khối này có thể tham khảo thêm các kiến thức của khối khác cũng là điều tốt, nhất là khoa học cần có tính chất khoa học liên ngành như hiện nay.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tập thể thầy cô giáo Tổ toán thuộc Khoa Cơ Bản trường Đại học Công nghiệp Tp.HCM đã đóng góp nhiều ý kiến cho việc biên soạn giáo trình này.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng cảm sâu sắc đến Ban Giám Hiệu trường Đại học Công Nghiệp Tp.HCM, đặc biệt **Tiến sĩ. Hiệu Trưởng Tạ Xuân Tề, Ngài** đã động viên giúp đỡ để giáo trình này kịp ra mắt phục vụ sinh viên và thầy giáo trong năm học đầu tiên (2005-2006) trường được mang tên trường Đại học Công Nghiệp Tp.HCM.

Mặc dù tác giả đã rất cố gắng nhưng chắc hẳn không tránh khỏi thiếu sót. Những ý kiến đóng góp về nội dung và hình thức của giáo trình sẽ được tiếp thu với lòng biết ơn sâu sắc, xin gửi về TS. Nguyễn Phú Vinh, Khoa Cơ Bản, Trường Đại học Công Nghiệp Tp.HCM, điện thoại: 08.839929-165.

Tp.HCM, ngày 01 tháng 4 năm 2009

tác giả

Tiến Sĩ: Nguyễn Phú Vinh

MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
Mục lục.....	4
Chương 1: TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ	5
Chương 2: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM 1 BIẾN.....	17
Chương 3: TÍCH PHÂN	59
Chương 4: HÀM NHIỀU BIẾN.....	97
Chương 5: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN	158
Chương 6: LÝ THUYẾT CHUỖI	186
Chương 7: TÍCH PHÂN BỘI HAI.....	207
TÀI LIỆU THAM KHẢO	232

CHƯƠNG I TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

BÀI 1: TẬP HỢP

1.1. Khái niệm : Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học nên không định nghĩa. Ta có thể dùng một số ví dụ sau để hiểu về tập hợp.

Tập hợp các sinh viên trong một lớp. Tập hợp các tài khoản ở một ngân hàng. Tập hợp các số tự nhiên 1,2,3,4.

Các sinh viên, các tài khoản, các số tự nhiên nói trên gọi là các phần tử của tập hợp.

1.2. Cách viết tập hợp: Chẳng hạn ta gọi A là tập hợp các số tự nhiên 1,2,3,4. Khi đó ta viết $A = \{1, 2, 3, 4\}$ Số 1 là phần tử của A ta viết $1 \in A$. Số 5 không phải là phần tử của A ta viết $5 \notin A$.

Cách viết tập hợp A như vậy được gọi là cách viết liệt kê.

Một cách viết mà ở đó không thấy rõ các phần tử của tập hợp, nhưng vẫn biết được các phần tử của tập hợp được gọi là cách viết nêu tính chất.

Ví dụ: Gọi B là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 2010 và chia hết cho 3. Tập B cũng có thể viết rõ như tập A ở trên tuy nhiên sẽ rất dài, ta viết tập B như sau $B = \{n \in \mathbb{N} / n < 2010; n:3\}$ Khi đó ta có

$2007 \in B; 2009 \notin B; 2010 \in B$

Một tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng, ký hiệu \emptyset

Tập hợp B được gọi là tập con của tập hợp A nếu mọi phần tử của B đều là phần tử của tập A, ký hiệu $B \subset A$

Ví dụ: $A = \{n \in \mathbb{N} / n < 2010; n:3\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} / n < 2010; n:6\}$

$B \subset A$. Gọi C là tập các số nguyên tố lớn hơn 2 và là số chẵn. Ta có $C = \emptyset$

1.3. Các phép toán trên tập hợp.

1.3.1. Giao của các tập hợp: Giao của hai tập hợp A, B là một tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B. Ký hiệu $A \cap B$

Ví dụ: $A = \{n \in \mathbb{N} / n:2\}$; $B = \{n \in \mathbb{N} / n:3\}$, khi đó $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} / n:6\}$.

1.3.2. Hợp của các tập hợp: Hợp của hai tập hợp A, B là một tập hợp gồm các phần tử thuộc A hay thuộc B. Ký hiệu $A \cup B$

Ví dụ: $A = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\}$; $B = \{n \in \mathbb{N} / 1 \leq n \leq 13\}$, khi đó

$A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$.

1.3.3. Hiệu của hai tập hợp: Hiệu của hai tập hợp A, B là một tập hợp gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B. Ký hiệu $A \setminus B$.

Ví dụ: $A = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\}$; $B = \{n \in \mathbb{N} / n \geq 3\}$, khi đó

$A \setminus B = \{0; 1; 2\}$, $B \setminus A = \{11; 12; \dots\}$

1.3.4. Tích của hai tập hợp: Tích của hai tập hợp A, B là một tập hợp gồm các cặp phần tử theo thứ tự thuộc A và thuộc B. Ký hiệu $A \times B$

Ví dụ: $A = \{1, 2, 3\}; B = \{a, b\}$, khi đó

$$A \times B = \{(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b)\}$$

1.4. Các tập hợp số:

Tập hợp số tự nhiên là tập có dạng $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Tập hợp số nguyên là tập có dạng $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Tập hợp số hữu tỷ là tập có dạng $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$. Số hữu

tỷ là số có thể biểu diễn dưới dạng phân số. Ngược lại với số hữu tỷ gọi là số vô tỷ.

Tập hợp số thực là tập số gồm tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ, ký hiệu \mathbb{R} . Ta có $\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$. Trong đó \mathbb{C} là tập các số phức.

1.5. Số phức.

1.5.1. Định nghĩa 1. Số phức là số có dạng $z = a + ib$ trong đó a, b là số thực, i gọi là đơn vị ảo thỏa $i^2 = -1$.

Ta nói a là phần thực, ký hiệu $\text{Re}z$, b là phần ảo, ký hiệu $\text{Im}z$.

Tập các số phức được ký hiệu là \mathbb{C} . Nếu $b = 0$ thì quy ước $z = a$ là số thực.

Hai số phức gọi là bằng nhau nếu phần thực bằng phần thực, phần ảo bằng phần ảo.

1.5.2. Các phép toán trên tập số phức.

1.5.2.1. Phép cộng. Tổng của hai số phức là một số phức, có phần thực là tổng của hai phần thực, phần ảo là tổng của hai phần ảo.

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2, z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2).$$

1.5.2.2. Phép nhân một số thực với một số phức, là một số phức xác định như sau $z = a + ib, \alpha \in \mathbb{R}. \alpha z = \alpha a + i\alpha b$

1.5.2.3. Phép nhân hai số phức, là một số phức xác định như sau

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2. z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

1.5.2.4. Phép chia hai số phức, là một số phức xác định như sau

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2. z_2 \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Chú ý: Số phức $a - ib$ gọi là số phức liên hợp của số phức $a + ib$, ký hiệu $\bar{z} = a - ib$

Ví dụ: Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i; z_2 = 4 + 5i$, khi đó ta có

$$z_1 + z_2 = 6 + 2i.$$

$$z_1 - z_2 = -2 - 8i.$$

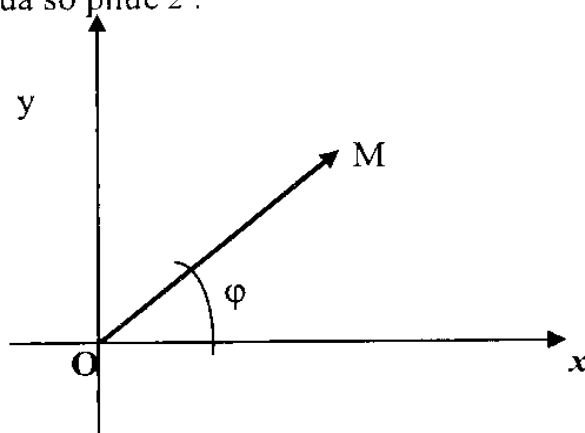
$$7z_1 = 7(2 - 3i) = 14 - 21i.$$

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(4 + 5i) = 23 - 2i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{4 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{-7 - 22i}{31}.$$

1.5.3. Biểu diễn hình học của số phức.

Với mỗi số phức $z = a + ib$ cho tương ứng với vectơ $\overline{OM} = (a, b)$ gọi là biểu diễn hình học của số phức z .



Mô đun của \overline{OM} gọi là mô đun của số phức, ký hiệu

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Gọi $\varphi = (\overline{Ox}, \overline{OM})$ là argument của số phức. Ta có:
$$\begin{cases} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases}$$

Từ đó $z = a + ib = r \left(\frac{a}{r} + i \frac{b}{r} \right) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ gọi là dạng lượng giác của số phức. Nếu đặt $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ thì $z = r e^{i\varphi}$ gọi là dạng mũ của số phức.

1.5.4. Định lý. Cho hai số phức

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \text{ ta có}$$

$$i) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$ii) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

1.5.5. Hệ quả (công thức Moivre)

Cho số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Khi đó ta có

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.5.6. Căn bậc n của số phức.

1.5.6.1. Định nghĩa. Số phức w được gọi là căn bậc n của số phức z nếu

$$w^n = z$$

Ví dụ: $w_0 = -1$; $w_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $w_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ là các căn bậc 3 của -1 .

1.5.6.2. Định lý. Cho số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Khi đó n giá trị sau là căn bậc n của z

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right), k = 0; 1; 2; \dots; n-1.$$

$$\text{Ví dụ: } \sqrt[n]{1} = \cos \frac{k2\pi}{n} + i \sin \frac{k2\pi}{n}, k = 0; 1; 2; \dots; n-1.$$

BÀI TẬP

1.1. Cho A, B, C là ba tập hợp tùy ý. Chứng minh rằng

- $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

1.2. Cho A, B là hai tập con của tập X . Chứng minh rằng

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

1.3. Cho tập $A = \{1; 2; 3\}$. Tìm các tập con của tập A .

1.4. Biểu diễn trên mặt phẳng xOy các tập con của R^2 sau

- $A = \{(x; y) \in R^2 : y = x^2\}$
- $B = \{(x; y) \in R^2 : y = \frac{1}{x}; x \neq 0\}$.
- $C = \{(x; y) \in R^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $D = \{(x; y) \in R^2 : 2x + 3y < 6\}$.
- $E = \{(x; y) \in R^2 : 0 \leq 2x + 3y < 6; -3 < x - y < 2\}$

1.5. Biểu diễn trong không gian $Oxyz$ các tập con của R^3 sau

- $A = \{(x; y; z) \in R^3 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $B = \{(x; y; z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- $C = \{(x; y; z) \in R^3 : z = x^2 + y^2\}$.
- $D = \{(x; y; z) \in R^3 : z = 1 - x^2 - y^2\}$.

1.6. Thực hiện các phép tính sau

a) $(1+i)^2(1-i) + (1+i)(1-i)^2$

b) $\frac{3+4i}{3-4i} + \frac{3-4i}{3+4i}$

c) $\overline{2+3i} - (4-2i)(6-i)$

d) $(1+i\sqrt{3})^{12}$

e) $\left(\frac{2-2i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{21}$

f) $\sqrt[3]{i}$

1.7. Chứng minh nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$, trong đó

$a \neq 0; a; b; c \in \mathbb{C}$ là $z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

1.8. Giải các phương trình sau

a) $z^2 - 4z + 5 = 0$

b) $z^2 + (4+3i)z + 4-4i = 0$.

1.9. Chứng minh các định lý trong phần 1.5 (Số phức).

1.10. a) Tính $(1+i)^{100}$.

b) Tính các tổng

i) $S_{100} = C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots + C_{100}^{100}$

ii) $T_{100} = C_{100}^1 - C_{100}^3 + C_{100}^5 - C_{100}^7 + \dots - C_{100}^{99}$.

BÀI 2: ÁNH XẠ

2.1. Định nghĩa 1. Cho hai tập hợp X, Y khác rỗng. Ta gọi một ánh xạ f từ X đến Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc X với đúng một phần tử y thuộc Y . Ký hiệu

$$f : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y$$

y được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f , ta ký hiệu $y=f(x)$.

Ví dụ 1: Gọi X là tập hợp một nhóm người nào đó, Y là tập các số nguyên từ 0 cho đến 120. Quy tắc đặt tương ứng mỗi người của tập X với một số bên tập Y , số đó đúng bằng số tuổi của người đó. Quy tắc này là một ánh xạ.

Ví dụ 2: Gọi X là tập hợp các tài khoản ở một ngân hàng, Y là tập hợp những người đứng tên các tài khoản đó. Quy tắc đặt tương ứng mỗi tài khoản của tập X với một tên người bên tập Y . Tên là tên người chủ tài khoản đó. Quy tắc này là một ánh xạ.

Ví dụ 3: Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ với một số nguyên $y \in \mathbb{Z}$, trong đó y là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Quy tắc này là một ánh xạ và gọi là phần nguyên của x .

$$\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$$

$$x \mapsto y = \varphi(x) = [x]$$

Ở đây ta có $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1.2) = 1$, $\varphi(-4.7) = -5$.

Ví dụ 4: Quy tắc $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ không phải là một ánh xạ.

2.2. Định nghĩa 2. Nếu Y là tập hợp số thì một ánh xạ từ X đến Y gọi là một hàm số.

Có nhiều cách cho một ánh xạ. Cho thành một công thức, thường là các hàm số. Chẳng hạn

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = x^2,$$

$$g : (0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \mapsto y = g(x) = \ln x$$

là các hàm số một biến mà ta đã biết ở phổ thông. Xét một ánh xạ cho bằng công thức như sau

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y) = x + 3y.$$

Rõ ràng quy tắc này đúng là một ánh xạ. Vì ứng với mỗi cặp (x, y) thuộc $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ chỉ tương ứng với đúng một số $x + 3y$ thuộc \mathbf{R} . Ánh xạ này gọi là hàm hai biến.

Trong kinh tế, định nghĩa “Câu là lượng một mặt hàng mà người mua muốn mua ở mỗi mức giá có thể chấp nhận được”

Định nghĩa này cho thấy một quy luật là, ở mỗi mức giá bán P thì lượng hàng mà người mua, mua một lượng là Q . Như vậy nội dung của định nghĩa thể hiện một ánh xạ

$$Q_D : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$$

$$P \mapsto Q = Q_D(P)$$

Ánh xạ này gọi là hàm cầu.

Cũng trong kinh tế, định nghĩa “Cung là lượng một mặt hàng mà người bán muốn bán ở mỗi mức giá có thể chấp nhận được”

Định nghĩa này cho thấy một quy luật là, ở mỗi mức giá bán P thì lượng hàng mà người bán, bán một lượng là Q . Như vậy nội dung của định nghĩa thể hiện một ánh xạ

$$Q_S : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$$

$$P \mapsto Q = Q_S(P)$$

Ánh xạ này gọi là hàm cung.

Ngoài ra ánh xạ có thể được cho dưới dạng bảng. Chẳng hạn các bản tin dự báo thời tiết hằng ngày là các ánh xạ, nếu chỉ chú ý đến nhiệt độ cao nhất hay thấp nhất. Đây là bản tin dự báo nhiệt độ trong ngày 9 tháng 2 năm 2007 (ở đây chú ý đến nhiệt độ cao nhất).

Địa phương	Nhiệt độ
SAPA	$15^{\circ}C$
HÀ NỘI	$26^{\circ}C$
HẠ LONG	$26^{\circ}C$
VINH	$29^{\circ}C$
HOÀNG SA	$27^{\circ}C$
ĐÀ NẴNG	$28^{\circ}C$
PLEIKU	$30^{\circ}C$
NHA TRANG	$29^{\circ}C$
TP.HCM	$34^{\circ}C$
TRƯỜNG SA	$28^{\circ}C$

(bảng 1)

Đây là một ánh xạ từ tập các địa phương vào tập số thực R . Nếu chú ý thêm độ ẩm, ứng với bảng sau đây

Địa phương	Nhiệt độ	Độ ẩm
SAPA	$15^{\circ}C$	58%
HÀ NỘI	$26^{\circ}C$	75%
HẠ LONG	$26^{\circ}C$	68%
VINH	$29^{\circ}C$	70%
HOÀNG SA	$27^{\circ}C$	76%
ĐÀ NẴNG	$28^{\circ}C$	72%
PLEIKU	$30^{\circ}C$	79%
NHA TRANG	$29^{\circ}C$	77%
TP.HCM	$34^{\circ}C$	75%
TRƯỜNG SA	$28^{\circ}C$	60%

(bảng 2)

được một ánh xạ từ tập các địa phương vào tập $R \times R = R^2$. Nếu gọi tập các địa phương là S thì bảng 2 là ánh xạ $f: S \rightarrow R^2$ và ta có chẳng hạn $f(\text{TP.HCM}) = (34; 0.75)$.

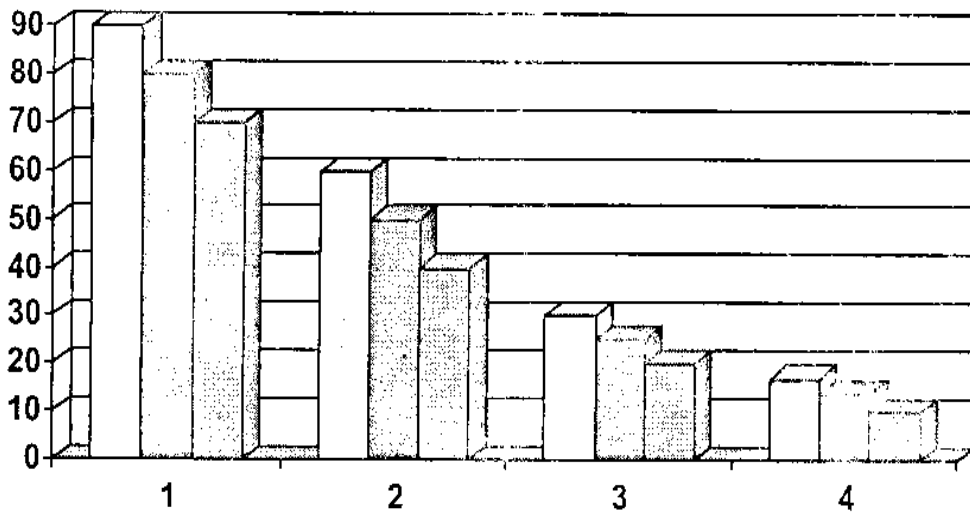
2.3. Định nghĩa 3. Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$. Tập hợp $G = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\} \subseteq X \times Y$ được gọi là đồ thị của ánh xạ f .

Nếu X, Y là các tập hợp số thì các điểm của đồ thị có thể biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ. Đây là bài toán vẽ đồ thị hàm số. Sau đây ta giới thiệu hai đồ thị của hàm số là hàm cầu và hàm cung. Hàm cầu

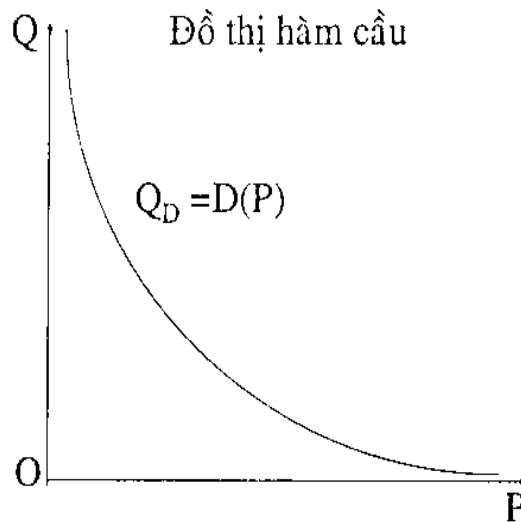
$$Q_D : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$$

$$P \mapsto Q = Q_D(P)$$

Theo định nghĩa của Cầu, thông thường thì khi P giảm Q sẽ tăng. Do đó đồ thị hàm cầu có thể minh họa ở một biểu đồ sau



Do đó hàm cầu có đồ thị

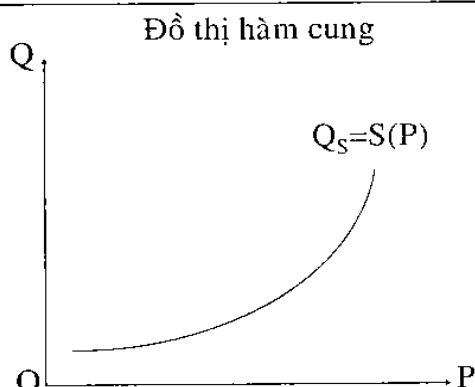


Hàm cung

$$Q_S : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$$

$$P \mapsto Q = Q_S(P)$$

Theo định nghĩa của Cung, thông thường thì P tăng Q tăng. Do đó hàm cung có đồ thị



2.4. Định nghĩa 4 (Đơn ánh, toàn ánh, song ánh):

Cho ánh xạ $f : X \rightarrow Y$

Ánh xạ f được gọi là đơn ánh, nếu $\forall x_1; x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Chẳng hạn việc xếp 5 người ngồi vào 7 cái khác nhau là một đơn ánh.

Ánh xạ f được gọi là toàn ánh, nếu $\forall y \in Y \Rightarrow \exists x \in X : y = f(x)$.
 Ánh xạ cho bởi công thức $f(x) = \cos x$ là một toàn ánh từ tập số thực R đến tập các số thực thuộc đoạn $[-1; 1]$.

Ánh xạ f được gọi là song ánh, nếu f vừa đơn ánh vừa toàn ánh, hay $\forall y \in Y, \exists ! x \in X : y = f(x)$ Phép hoán vị n phần tử, phép chiếu song song các điểm từ một đường thẳng lên một đường thẳng là các song ánh.

2.5. Định nghĩa 5. Cho hai ánh xạ

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \\ g : Y &\rightarrow Z \\ y &\mapsto z = g(y). \end{aligned}$$

Ánh xạ $h : X \rightarrow Z$ định bởi $h(x) = g(f(x))$ được gọi là tích của hai ánh xạ f, g .
 Ký hiệu $h = g \circ f$.

Ví dụ. Cho hai ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : R &\rightarrow Z & \psi : Z &\rightarrow N \\ x &\mapsto [x] & \text{và} & & x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

thì ánh xạ hợp $\psi \circ \varphi : R \rightarrow N$ định bởi $\psi \circ \varphi(x) = [|x|]$. Khi đó $\psi \circ \varphi(-2.7) = [| -2.7 |] = [2.7] = 2, \psi \circ \varphi(\sqrt{3}) = 1$.

2.6. Định nghĩa 6. Cho song ánh $f : X \rightarrow Y$ Ứng với mỗi y thuộc Y có duy nhất một x thuộc X sao cho $y = f(x)$. Tương ứng từ Y đến X này được gọi là ánh xạ ngược của f . Ký hiệu

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

trong đó $y=f(x)$. Ví dụ, song ánh $f : N \rightarrow \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ định bởi $f(n)=2n$ có ánh xạ ngược là $f^{-1} : \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \rightarrow N, f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$

Ánh xạ $f : R \rightarrow (0; +\infty); y = f(x) = e^x$ có ánh xạ ngược là $f^{-1} : (0; +\infty) \rightarrow R; x = f^{-1}(y) = \ln y$.

Ánh xạ $f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]; y = f(x) = \sin x$ có ánh xạ ngược là $f^{-1} : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; x = f^{-1}(y) = \arcsin y$ Theo định nghĩa ánh xạ ngược được một số kết quả như

$$\arcsin(0) = 0; \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}; \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \dots$$

Ánh xạ $f : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]; y = f(x) = \cos x$ có ánh xạ ngược là $f^{-1} : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]; x = f^{-1}(y) = \arccos y$ Theo định nghĩa ánh xạ ngược được một số kết quả như

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}; \arccos(1) = 0; \arccos(-1) = \pi \dots$$

Ánh xạ $f : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R; y = f(x) = \operatorname{tg} x$ có ánh xạ ngược là $f^{-1} : R \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ Theo định nghĩa ánh xạ ngược được một số kết quả như $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(0) = 0; \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1) = \frac{\pi}{4}; \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \dots$

Ánh xạ $f : (0; \pi) \rightarrow R; y = f(x) = \operatorname{cotg} x$ có ánh xạ ngược là $f^{-1} : R \rightarrow (0; \pi); x = f^{-1}(y) = \operatorname{arccotg} y$ Theo định nghĩa ánh xạ ngược được một số kết quả như $\operatorname{arc} \operatorname{cotg}(0) = +\infty; \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1) = \frac{\pi}{4}; \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-1) = -\frac{3\pi}{4} \dots$

2.7. Định lý 1. Cho hai ánh xạ $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$. Khi đó

i) Nếu f, g đơn ánh thì $g \circ f$ đơn ánh.

ii) Nếu f, g toàn ánh thì $g \circ f$ toàn ánh.

iii) Nếu f, g song ánh thì $g \circ f$ song ánh. Hơn nữa các ánh xạ ngược

của f, g đều là song ánh và $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

BÀI TẬP

2.1. Xét xem các tương ứng sau tương ứng nào là ánh xạ. Nếu là ánh xạ hãy xét tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh

a) $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ định bởi $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=1$.

b) $g: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2\}$ định bởi $g(a)=g(b)=g(c)=1; g(c)=g(d)=2$.

c) $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ định bởi $h(m)$ là phần dư của phép chia m cho n (n là một số nguyên cho trước).

d) j là một phép hoán vị của tập n phần tử.

e) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$

f) $l: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (\mathbb{C} là tập số phức) định bởi $l(z) = z^2 - 3z + 1$

g) $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ định bởi $w(z) = \sqrt[3]{z}$

2.2. Cho hai tập $X = \{1, 2, 3, 4\}$ và $Y = \{1, 2, 3\}$. Hỏi

a) Có bao nhiêu ánh xạ từ X đến Y ?

b) Có bao nhiêu đơn ánh từ X đến Y ?

c) Có bao nhiêu toàn ánh từ X đến Y ?

d) Có bao nhiêu song ánh từ X đến Y ?

2.3. Chứng minh định lý mục 2.7 .

2.4. Nhà toán học Riemann có phép biểu diễn hình học của số phức như sau

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2: z = x + iy \mapsto (x, y)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow (S) = \left\{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

$$N(x_N, y_N) \mapsto M(x_M, y_M, z_M)$$

Trong đó M là giao điểm của mặt cầu (S) và đường thẳng SN với $S(0;0;1)$ (chú ý N lúc này phải lấy thêm thành phần cao độ $z=0$). Khi

đó số phức $z = x + iy$ cho tương ứng với $\vec{OM} = (x_M, y_M, z_M)$

i) Ánh xạ $g \circ f$ cho ta điều gì ?

ii) Tìm $g \circ f(1+i)$ và $g \circ f(1-2i)$.

iii) $g \circ f(z)$ với z là số phức có môđun tiến ra vô cùng.

2.5. Cho ánh xạ $f: [-1;1] \rightarrow \mathbb{R}$ định bởi $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

a) Tính $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Chứng tỏ $f(x)$ luôn là hằng số.

2.6. Cho ánh xạ $f: [-1;1] \rightarrow \mathbb{R}$ định bởi $f(x) = \arctg x + \operatorname{arccotg} x$.

a) Tính $f(0)$; $f(1)$

b) Chứng tỏ $f(x)$ luôn là hằng số.

CHƯƠNG 2
PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ THỰC.

1.1. Định nghĩa 1. Dãy số thực là ánh xạ (hàm số) từ tập số tự nhiên \mathbb{N} (hay tập con của tập \mathbb{N}) vào tập số thực \mathbb{R} .

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a(n) = a_n$$

Ví dụ: Dãy số thực cho bởi công thức $a_n = \frac{1}{n}$. Khi đó

$a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{3}; \dots$. Dãy số xác định theo quy tắc $u_1 = u_2 = 1$, và

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \forall n > 2$. Khi đó $u_3 = 2; u_4 = 3; u_5 = 5; u_6 = 8; \dots$.

Vì dãy số là một hàm số nên các khái niệm như tăng, giảm, bị chặn, ... giống như các khái niệm của hàm số.

1.2. Định nghĩa 2. Cho dãy số thực (a_n) . Số thực a được gọi là giới hạn của dãy (a_n) nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tìm được số tự nhiên N_0 , sao cho với mọi $n \geq N_0$ thì $|a_n - a| < \varepsilon$. Ký hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Lúc này dãy (a_n) gọi là có giới hạn hữu hạn.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2$.

Giải: Chú ý rằng $\left| \frac{2n+1}{n-1} - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1 + \frac{3}{\varepsilon}$. Khi đó với

mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $N_0 = 1 + \left[1 + \frac{3}{\varepsilon} \right]$ ($[x]$ là phần nguyên của

x), và với mọi số tự nhiên n lớn hơn N_0 thì $\left| \frac{2n+1}{n-1} - 2 \right| < \varepsilon$. Đây là điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, trong đó $0 < q < 1$

Giải: Vì $0 < q < 1$ nên $\frac{1}{q} > 1 \Rightarrow \exists a > 0 : \frac{1}{q} = 1 + a$. Theo bất đẳng thức

Bernoulli $\left(\frac{1}{q} \right)^n = (1+a)^n \geq 1+na \Rightarrow q^n \leq \frac{1}{1+na}$ Do

$$\text{đó } \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = 1 + \left\lceil \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil : \forall n \geq N_0 \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon$$

1.3. Định lý 1. Giới hạn nếu có của một dãy số là duy nhất.

Thật vậy, nếu dãy số (a_n) có hai giới hạn là a và b khác nhau. Khi đó với $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$, tồn tại $N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ đồng thời cũng có $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$. Nếu chọn $n \geq \max(N_1; N_2)$ thì $|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n-b| < 2\varepsilon$. Từ đây suy ra điều vô lý. Vậy giới hạn nếu có của một dãy số là duy nhất.

1.4. Định lý 2. Nếu dãy số có giới hạn thì bị chặn. Ngược lại có thể không đúng.

Ví dụ: Dãy số $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$ có giới hạn là 2 nên bị chặn,

$0 < \frac{2n+1}{n-1} < 3, \forall n > 4$ Dãy số $a_n = (-1)^n$ bị chặn nhưng không có

giới hạn. Vì nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = a$ thì $\exists N_0 : \forall n \geq N_0 \Rightarrow |(-1)^n - a| < 1$.

Khi đó $(-1)^{N_0+2}$ và $(-1)^{N_0+3}$ có giá trị đối nhau nên

$$\begin{aligned} & \left| (-1)^{N_0+2} - (-1)^{N_0+3} \right| = \left| \left((-1)^{N_0+2} - a \right) + \left(a - (-1)^{N_0+3} \right) \right| \\ & \leq \left| (-1)^{N_0+2} - a \right| + \left| a - (-1)^{N_0+3} \right| < 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Kết quả này dẫn đến mâu thuẫn.

1.5. Định lý 3. Cho các giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Khi đó ta có:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = ka, k \in \mathbb{R},$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab,$

iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, b_n \neq 0; b \neq 0$

Bằng cách vận dụng định lý trên dễ dàng tính được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{n^3 + 2n + 5} = 0 \text{ hoặc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - n + 1}{3n^2 + 7n + 9} = \frac{-2}{3}$$

hay trực căn thức như

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - \sqrt{n^2 + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n + n - \sqrt{n^2 + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} + n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

1.6. Định lý 4. (Định lý giới hạn kẹp) Cho ba dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ thỏa $a_n \leq b_n \leq c_n$ với mọi n đủ lớn. Khi đó nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Ví dụ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1} = 0$

Vì $-\frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{n \sin n!}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2 + 1}, \forall n$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n}{n^2 + 1} \right) = 0.$$

1.7. Định nghĩa 2. Dãy số (a_n) được gọi là tiến dương vô cùng nếu $\forall M > 0, \exists N_0 : \forall n > N_0 \Rightarrow a_n > M$. Ký hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Dãy số (a_n) được gọi là tiến đến âm vô cùng nếu $\forall M > 0, \exists N_0 : \forall n > N_0 \Rightarrow a_n < -M$. Ký hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Ví dụ : Dãy số $a_n = n^2 + 2n \rightarrow +\infty$ và dãy số $b_n = -n^3 + 4n \rightarrow -\infty$.

1.8. Định lý 5. Dãy số tăng, bị chặn trên thì hội tụ. Dãy số giảm, bị chặn dưới thì hội tụ.

Dãy số $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là một dãy số tăng và bị chặn trên (chúng mình hơi dài) nên theo định lý trên dãy số này hội tụ, và giới hạn của dãy là $e \approx 2.71828$. Tổng quát : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n = e^s$.

Trong thực tế có rất nhiều hiện tượng thỏa giới hạn này, sau đây là một kết quả.

1.9. Bài toán lãi ghép. Giả sử có số tiền P_0 đem gửi ở ngân hàng với lãi suất s trên một khoản thời gian nào đó. Nếu ta chia khoản thời gian này ra

làm n phần bằng nhau thì ở cuối khoản thời gian thứ nhất số tiền cả vốn lẫn lãi sẽ là $P_1 = P_0 + P_0 \frac{s}{n} = P_0 \left(1 + \frac{s}{n}\right)$. Dem số tiền này gửi tiếp thì ở cuối khoản thời gian thứ hai số tiền cả vốn lẫn lãi là $P_2 = P_1 + P_1 \frac{s}{n} = P_0 \left(1 + \frac{s}{n}\right)^2$. Tiếp tục quá trình này đến hết khoản thời gian thì tổng số tiền là $P_n = P_0 \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n$. Thật tự nhiên nếu n lớn thì số tiền cả vốn lẫn lãi của người gửi là

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n = P_0 e^s.$$

Công thức trên gọi là công thức tính lãi ghép liên tục.

BÀI TẬP.

1.1. Tính các giới hạn sau.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)(2n-3)}{n^3 + 4n - 2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)(7n+5)}{n^4 + 7n + 8}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n + 2}{n + 3}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n, (q \in \mathbb{R})$.

1.2. Tính các giới hạn sau.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{9n^2 + 3} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 - 1} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n - 8^{2n-1}}{6^n + 64^{n+1}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n + 1}{4^n + 6 \cdot (-5)^{n-1}}$

1.3. Chứng minh các định lý mục 1.4, 1.5, 1.6

1.4. Chứng minh dãy số $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tăng và bị chặn trên.

1.5. Tính các giới hạn sau.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$

d)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + q + q^2 + \dots + q^n\right)$, trong đó q là số thực cho trước.

1.6. Cho a là một số dương. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

1.7 Chứng minh các giới hạn sau.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$, trong đó $\alpha \in \mathbb{R}, p > 0$.

- 1.8. Một số tiền 50 triệu đồng gửi ở ngân hàng với lãi suất 7% trên một năm. Hỏi tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu nếu:
- a) Đầu tháng 1 năm 2006 đem gửi và cuối năm 2006 tới nhận.
 - b) Đầu tháng 1 năm 2006 đem gửi và cuối năm 2007 tới nhận.
 - c) Đầu tháng 1 năm 2006 đem gửi và cuối năm 2006 tới nhận, nhưng tính lãi cho mỗi ngày (tức là mỗi ngày rút ra cả vốn lẫn lãi và gửi lại).
 - d) Đầu tháng 1 năm 2006 đem gửi và cuối năm 2007 tới nhận, nhưng tính lãi cho mỗi ngày (tức là mỗi ngày rút ra cả vốn lẫn lãi và gửi lại).
 - e) Đầu tháng 1 năm 2006 đem gửi và cuối năm 2006 tới nhận, nhưng tính lãi ghép liên tục.
 - f) Đầu tháng 1 năm 2006 đem gửi và cuối năm 2007 tới nhận, nhưng tính lãi ghép liên tục.

BÀI 2: GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ THỰC.

2.1. Định nghĩa 1: Cho hàm số $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $x_0 \in \mathbb{R}$. Số thực a được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến x_0 nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

Ví dụ: Cho $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Thật vậy, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon: \forall x, 0 < |x - 0| < \delta$ ta có

$$|f(x) - 0| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

Chú ý: $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Ta gọi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ là một lân cận của x_0

2.2. Định lý 1: Cho hàm số $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $x_0 \in \mathbb{R}$. Khi đó

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ khi và chỉ khi với mọi dãy $(x_n), x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$

$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

Ta công nhận định lý trên.

Ví dụ 1: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (4x - 1) = 3$.

Thật vậy, $(x_n), x_n \rightarrow 1 \Rightarrow f(x_n) = 4x_n - 1 \rightarrow 4 \cdot 1 - 1 = 3$.

Ví dụ 2: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ là không tồn tại.

Thật vậy,

$(x_n), x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty); (x'_n), x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ trong khi

đó ta có $f(x_n) = 0 \rightarrow 0$ và $f(x'_n) = 1 \rightarrow 1$ Vậy theo định lý 1 giới hạn không tồn tại.

2.3. Định nghĩa 2: Cho hàm số $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Số A được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x tiến ra dương vô cùng, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0: \forall x, x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Tương tự $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ nếu hàm f có miền xác định chứa

khoảng $(-\infty, a)$ và $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0: \forall x, x < -M \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$. Hơn

nữa, hàm f có miền xác định chứa các khoảng $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ được gọi là có giới hạn là C khi x tiến ra vô cùng, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x, |x| > M \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$$

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3.$

Thật vậy,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M = 1 + \frac{4}{\varepsilon} : \forall x, |x| > M \Rightarrow |f(x) - 3| = \left| \frac{3x+1}{x-1} - 3 \right| = \left| \frac{4}{x-1} \right| < \varepsilon.$$

2.4. Định lý 2: Giới hạn nếu có của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến x_0 hoặc vô cùng là duy nhất.

Chứng minh.

Giả sử trái lại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b, b \neq a$. Khi đó với

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b| > 0 \text{ tồn tại } \delta_1 > 0 \text{ sao cho } \forall x, |x - x_0| < \delta_1 \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon$$

và

$$\delta_2 > 0 \text{ sao cho } \forall x, |x - x_0| < \delta_2 \text{ thì } |f(x) - b| < \varepsilon \text{ Chọn}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0, \text{ khi đó } \forall x, |x - x_0| < \delta \text{ các bất đẳng thức}$$

$$|f(x) - a| < \varepsilon; |f(x) - b| < \varepsilon \text{ xảy ra đồng thời. Từ đó ta có}$$

$$|a - b| = |a - f(x) + f(x) - b| \leq |a - f(x)| + |f(x) - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$

Mâu thuẫn. (Chứng minh tương tự cho trường hợp vô cùng).

2.5. Định lý 3: Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Khi đó tồn tại số dương M và

$$\text{khoảng } J \text{ chứa } x_0 \text{ sao cho } |f(x)| \leq M, \forall x \in J.$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ thì tồn tại số dương M và N sao cho

$$|f(x)| \leq M, \forall x, |x| \geq N.$$

Ta chứng minh phần thứ hai của định lý. Vì $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ nên

theo định nghĩa ta có $\varepsilon = 1 > 0, \exists N > 0 : \forall x, |x| > N \Rightarrow |f(x) - a| < 1$. Lại có

$$|f(x)| = |f(x) - a + a| \leq |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|. \text{ Đặt } M = 1 + |a| \text{ suy ra}$$

(đpcm).

2.6. Định lý 4: Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Khi đó ta có:

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = ka, k \in \mathbb{R},$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab,$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, b \neq 0, g(x) \neq 0, \forall x: |x - x_0| < \delta$$

trong đó $\delta > 0$ đủ nhỏ. Tức là giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn. Kết quả tương tự cho trường hợp x tiến đến vô cùng.

Chứng minh.

Ta chứng minh một công thức, chẳng hạn iii). Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có $\delta_1 > 0$ và $M > 0$ sao cho $\forall x: |x - x_0| < \delta_1$ thì $|g(x)| \leq M$ Đồng thời

có $\delta_2 > 0$ sao cho $\forall x: |x - x_0| < \delta_2$ thì $|f(x) - a| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, và $\delta_3 > 0$ sao

cho $\forall x: |x - x_0| < \delta_3$ thì $|g(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2a}$ Từ đó chọn

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ thì $\forall x: |x - x_0| < \delta$ các bất đẳng thức $|g(x)| \leq M$;

$|f(x) - a| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$; $|g(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2a}$ xây ra đồng thời và ta có

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - g(x)a + g(x)a - ab| \leq$$

$$\leq |f(x) - a||g(x)| + |a||g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2M}M + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon$$

Các kết quả còn lại chứng minh tương tự.

2.7. Định nghĩa 3: Cho hàm số $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $x_0 \in \mathbb{R}$ Số thực a được gọi là giới hạn bên phải của $f(x)$ khi x tiến đến x_0 nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$.

Tương tự, số thực a được gọi là giới hạn bên trái của $f(x)$ khi x tiến đến x_0 nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$.

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{|x|} = 1$.

Thật vậy, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = 2\varepsilon > 0: \forall x, 0 < x - 0 < \delta$, ta có

$$\left| \frac{\sqrt{1+2x}-1}{|x|} - 1 \right| = \left| \frac{2}{\sqrt{1+2x}+1} - 1 \right| = \left| \frac{1-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}+1} \right| =$$

$$= \left| \frac{-2x}{(\sqrt{1+2x}+1)^2} \right| < \frac{|-2x|}{(1+1)^2} < \frac{1}{2}|x| < \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}2\varepsilon = \varepsilon. \text{ (đpcm)}$$

Tương tự ta cũng có $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{|x|} = -1$

2.8. Định lý 5: Hàm số $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Hàm số f có giới hạn tại x_0

khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Chỉ cần dựa vào định nghĩa là ta có kết quả.

2.9. Định lý 6: . (Định lý giới hạn kẹp) Cho ba hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ thỏa điều kiện $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\forall x \in J$, trong đó J là một lân cận của x_0 .

Khi đó nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Chứng minh: Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước. Vì theo giả thiết $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$

nên tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho $\forall x, |x - x_0| < \delta_1$ thì $-\varepsilon < g(x) - a$. Tương tự có

$\delta_2 > 0$ sao cho $\forall x, |x - x_0| < \delta_2$ thì $h(x) - a < \varepsilon$. Với

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ ta có

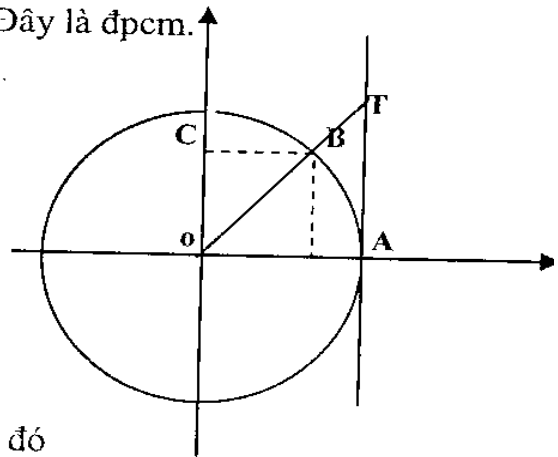
$-\varepsilon < g(x) - a \leq f(x) - a \leq h(x) - a < \varepsilon$ Đây là đpcm.

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Giải: Trên đường tròn lượng giác ta có

$$OC < \widehat{AB} < AT$$

(độ dài đoạn OC , cung AB , đoạn AT)



Tương đương $\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ từ đó

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2.10. Một số giới hạn cơ bản:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}.$

iv) $\lim_{x \rightarrow A} \left(1 + \frac{y}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^y$ với $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = \infty.$

v) $\lim_{x \rightarrow A} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow A} \left(\left[1 + f_1(x)\right]^{\frac{1}{f_1(x)}} \right)^{f_1(x)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow A} [f_1(x)g(x)]}$

với $\lim_{x \rightarrow A} f_1(x) = 0.$

Hai dạng sau thường dùng cho dạng vô định 1^∞

Ví dụ 1: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

Giải:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{-1}{2}.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos 3x} - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$

Giải:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos 3x} - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos 3x} - 1 + 1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos 3x} - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + \cos 3x} - 1}{\cos 3x - 1} \cdot \frac{\cos 3x - 1}{x^2} +$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(1 + \sqrt{\cos 2x})x^2} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{(1 + \sqrt{\cos 2x})x^2} = \frac{1}{5} \left(\frac{-9}{2} \right) + 1 = \frac{1}{10}.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \right)^x$ có dạng 1^∞

$$\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} = 1 + \frac{2x + 2}{x^2 - x - 1} \right)^x = \left([1 + f_1(x)] f_1(x) \right)^{f_1(x) \cdot x}$$

$$\text{với } \lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 2}{x^2 - x - 1} = 0$$

$$\text{Vậy } I = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f_1(x)g(x)]} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+2}{x^2-x-1} \cdot x \right]} = e^2.$$

2.11. Vô cùng bé:

2.11.1. Định nghĩa 4: Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Ví dụ: $\alpha(x) = x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$, $\alpha(x) = \sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$,

$\alpha(x) = \cos x$ là VCB khi $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$...

2.11.2. Định nghĩa 5:

a) Hai hàm số $\alpha(x)$, $\beta(x)$ được gọi là vô cùng bé tương đương khi

$x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$, và $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \rightarrow x_0$.

b) $\alpha(x)$ gọi là vô cùng bé bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \rightarrow x_0$, nếu

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Ký hiệu $\alpha(x) = o[\beta(x)]$, $x \rightarrow x_0$.

Ví dụ: x^3 gọi là vô cùng bé bậc cao hơn x^2 khi $x \rightarrow 0$

Ví dụ: Dựa vào một số giới hạn cơ bản ta có

$$\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x, \quad x \rightarrow 0.$$

2.11.2. Định lý 7: Cho các vô cùng bé tương đương $u(x) \sim \alpha(x)$ $x \rightarrow x_0$

và $v(x) \sim \beta(x)$ $x \rightarrow x_0$. Khi đó ta có

i) $u(x)v(x) \sim \alpha(x)\beta(x)$ $x \rightarrow x_0$;

ii) $(u(x))^k \sim (\alpha(x))^k$ $x \rightarrow x_0$;

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Các kết quả này được suy ra từ định nghĩa. Ta xét một ví dụ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+tgx} - 1)(1 - \cos x)}{x^2 (\sqrt[5]{1-x} - 1)}$$

Giải: Ta có $\sqrt[3]{1+tgx} - 1 \sim \frac{1}{3}tgx \sim \frac{1}{3}x, x \rightarrow 0$; $\sqrt[5]{1-x} - 1 \sim \frac{1}{5}(-x), x \rightarrow 0$

Từ đó

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+tgx} - 1)(1 - \cos x)}{x^2 (\sqrt[5]{1-x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x(1 - \cos x)}{x^2 \frac{1}{5}(-x)} = \frac{-5}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{-5}{6}$$

2.12. Các đại lượng tương đương:

Tổng quát hơn đại lượng vô cùng bé, ta định nghĩa đại lượng tương đương.

2.12.1. Định nghĩa : Hai hàm số $f(x), g(x)$ được xác định trên khoảng mở I chứa x_0 . Ta nói f tương đương với g khi $x \rightarrow x_0$, nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \text{ Ký hiệu } f(x) \approx g(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

2.12.2. Định nghĩa : Hai hàm số $f(x), g(x)$ được xác định trên khoảng mở $I = (\alpha, +\infty)$. Ta nói f tương đương với g khi $x \rightarrow +\infty$, nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ Ký hiệu } f(x) \approx g(x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

2.12.3. Định nghĩa : Hai hàm số $f(x), g(x)$ được xác định trên khoảng mở $I = (-\infty, \alpha)$. Ta nói f tương đương với g khi $x \rightarrow -\infty$, nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ Ký hiệu } f(x) \approx g(x), \quad x \rightarrow -\infty.$$

2.12.4. Hệ quả : Cho $f \approx f_1$ và $g \approx g_1$ khi $x \rightarrow x_0$

(hoặc $f \approx f_1$ và $g \approx g_1$ khi $x \rightarrow \infty$, hoặc $f \approx f_1$ và $g \approx g_1$ khi $x \rightarrow -\infty$). Khi đó, ta có:

i)
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot g_1(x)]$$

ii)
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

(hoặc thay $x \rightarrow x_0$ bởi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$)

- Chú ý, tổng quát ta có: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] \neq \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + g_1(x)]$
- Nhưng cho $f \approx f_1$ và $g \approx g_1$ khi $x \rightarrow x_0$ và f, g cùng dương trong lân cận của x_0 . khi đó ta có:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + g_1(x)]$$

Ví dụ:

- a) $f = x^2 + 5 \approx f_1 = x^2$ và $g = -x^2 + 3 \approx g_1 = -x^2$ khi $x \rightarrow \pm\infty$, nhưng

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) + g(x)] = 8 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^2 - x^2] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f_1(x) + g_1(x)]$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Cách làm sai:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 \cos^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1 \quad (\text{do dùng định lý tương đương về giới hạn tổng} \\ &\sin^2 x \approx x^2) \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + \sin^2(3x)]}{\tan^2(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{\tan^2(5x)} = \frac{9}{25}$$

- d) Dựa vào kết quả: $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$ ($x \rightarrow 0$), ta có thể chứng minh

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} - 1 \sim \frac{m}{n}x \quad (x \rightarrow 0). \text{ Thật vậy:}$$

Để dàng ta có $(1+x)^m - 1 \sim mx$ ($x \rightarrow 0$), $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{m}{n}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{n}} \right]^m = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \underbrace{(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1}_{(*)} \right]^m = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{x}{n} \right]^m \end{aligned}$$

Vậy: $(1+x)^{\frac{m}{n}} - 1 \approx \left[1 + \frac{x}{n}\right]^m - 1 \approx [1+u]^m - 1 \approx m \cdot u = m \cdot \frac{x}{n} = \frac{m}{n} x$

2.13. Định nghĩa 6: Hàm số $f(x)$ có miền xác định là D , được gọi là liên tục tại $x_0 \in D$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ví dụ 1. Hàm số $f(x) = \sin x$ liên tục tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, và nói chung hàm số xác định bằng một công thức liên tục trên miền xác định của nó.

Ví dụ 2: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ ax+1 & x < 1. \end{cases}$$

Tìm a để hàm số liên tục trên miền xác định của nó.

Giải: Với mọi $x > 1$ ta có $f(x) = x^2$, nên $f(x)$ liên tục trên miền $x > 1$.

Với mọi $x < 1$ ta có $f(x) = ax + 1$; a là hằng số, nên $f(x)$ liên tục trên miền

$x < 1$. Tại $x = 1$, ta có $f(1) = 1$. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 1) = a + 1$. Vậy để hàm số liên tục tại $x = 1$ ta phải

có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. Suy ra $a = 0$.

BÀI TẬP.

2.1. Tính các giới hạn sau đây

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 - 2x}{3x^2 + 4x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 7x^2 + 6x - 14}{x^2 + 4x - 5}$,

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 2x^2 - 2x - 28}{x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m}$

2.2. Tính các giới hạn sau đây

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{4x^2 - 5x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[4]{4x^2 + 12x + 41}}{x - 2}$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt[3]{1+7x}}{\sqrt{1+5x} - \sqrt[6]{1+2x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}$, với $a > 0$.

2.3. Tính các giới hạn sau đây

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

2.4. Tính các giới hạn sau đây

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{x}, & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 1} - \sqrt[3]{27x^3 + 2x^2} \right), \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}}{x} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x}}{x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}. \end{aligned}$$

2.5. Tính các giới hạn sau đây

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1) \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}, & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 7x)}{\sqrt{1 + 2x} - 1}, \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^{2x}}{3^x - 4^{2x}} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + \sin^2 x)^{\operatorname{tg}^2 x}}{x^4} \end{aligned}$$

$$2.6. \text{ Cho hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+8x} - 1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

a) Tìm miền xác định của hàm số.

b) Tìm A để f liên tục trên miền xác định.

2.7 Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$ thì tồn tại một lân cận của

x_0 sao cho $f(x) > 0$ với mọi x thuộc lân cận đó.

BÀI 3: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN.

3.1. Định nghĩa 1: Cho hàm số $f : D \rightarrow R, x_0 \in D$. Hàm số f được gọi là có đạo hàm tại x_0 nếu giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại hữu hạn.

$$\begin{aligned} \text{Ta viết: } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

$\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của x tại x_0 , $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là số gia của y tại $y_0 = f(x_0)$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[n]{1+2x}$ tại $x_0 = 0$.

Giải:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+2x} - 1}{x - 0} = \frac{2}{n}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ tại x_0 .

Giải:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x_0. \end{aligned}$$

3.2. Định lý 1: Hàm số f có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại x_0 . Điều ngược lại có thể không đúng.

Ví dụ: $f(x) = |x|$ liên tục tại $x_0 = 0$, nhưng không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Thật vậy, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$ Trong khi đó

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$. Giới hạn này không tồn tại.

3.3. Quy tắc tính đạo hàm: Cho u, v là các hàm số có đạo hàm tại x_0 . Khi đó ta có:

$$i) \quad (u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

$$ii) \quad (ku)'(x_0) = k \cdot u'(x_0)$$

$$iii) \quad (u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

$$iv) \quad \left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

Ta chứng minh iv như sau:

$$\frac{u - u_0}{v - v_0} = \frac{1}{vv_0} \frac{uv_0 - vu_0}{x - x_0}$$

$$= \frac{1}{vv_0} \frac{uv_0 - u_0v_0 + u_0v_0 - vu_0}{x - x_0} = \frac{1}{vv_0} \left[\frac{v_0(u - u_0)}{x - x_0} - \frac{u_0(v - v_0)}{x - x_0} \right]$$

cho $x \rightarrow x_0$ ta được kết quả. \blacksquare

Ví dụ: Cho a, b, c, d, e là các số thực ta có

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{(2ax+b)(dx+e) - d(ax^2+bx+c)}{(dx+e)^2} = \frac{dax^2 + 2aex + be - cd}{(dx+e)^2}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & e \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{(dx+e)^2}$$

Bằng cách dùng định nghĩa và các quy tắc tính đạo hàm ta có bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp sau.

3.4. Bảng đạo hàm:

Hàm số y	Đạo hàm y'
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

tgx	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
cotgx	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$
arcsinx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccosx	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctgx	$\frac{1}{1+x^2}$
arccotgx	$\frac{-1}{1+x^2}$

3.5. Định lý 2: (Đạo hàm của hàm hợp) Cho hàm số $u : D \rightarrow R$, và hàm $f : E \subseteq u(D) \rightarrow R$ (với $u(D)$ là tập giá trị của u). Khi đó nếu f có đạo hàm theo biến u tại $u_0 = u(x_0)$ và u có đạo hàm theo biến x tại x_0 , thì hàm hợp $f \circ u$ có đạo hàm theo biến x tại x_0 . Hơn nữa ta có

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Tổng quát ta có: $f = f(g(h(k(t)))) \Rightarrow f'_t = f'_g \cdot g'_h \cdot h'_k \cdot k'_t$

Ví dụ 1: Đạo hàm của hàm số $g(x) = \sin(2x + 1)$ là $g'(x) = 2 \cos(2x + 1)$. Vì hàm g là hợp của hai hàm $f(u) = \sin u$ và $u(x) = 2x + 1$, cho nên theo công thức đạo hàm hợp ta có

$$g'(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \cos(u) \times 2$$

Ví dụ 2: Tính y''_{xx} theo biến t với: $\begin{cases} x = x(t) = e^t \cos t \\ y = y(t) = e^t \sin t \end{cases}$

$$y'_t = y'_x x'_t \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_t t'_x = \left(y'_x\right)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(y''_{xt}\right)}{x'_t} = 2 \frac{e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}$$

3.6. Định lý 3: (Đạo hàm của hàm ngược) Giả sử hàm $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0) \neq 0$. Nếu hàm f có hàm ngược là $x = f^{-1}(y)$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$ thì $x = f^{-1}(y)$ cũng có đạo hàm tại y_0 và ta có

$$x'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Chứng minh:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{x - x_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad \blacksquare$$

Ví dụ 1: Ta đã biết hàm $y = \sin x$ có hàm ngược là $x = \arcsin y$ với y thuộc $[-1, 1]$ và $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó ta có

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$\text{Vậy } (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$\text{Tương tự ta có: } (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\text{arccotg } x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$$

$$\text{Ví dụ 2: } \begin{array}{l} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \Rightarrow f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto y = x^2 \quad y \mapsto x = \sqrt{y} \end{array}$$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\text{Ví dụ 3: } \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \Rightarrow f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = e^x \quad y \mapsto x = \ln y \end{array}$$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

3.7. Đạo hàm cấp cao: Cho hàm số $y = f(x)$. Đạo hàm cấp n của f được

$$\text{định nghĩa quy nạp như sau } y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$$

Ví dụ: Hàm số $y = x^n$ có đạo hàm các cấp là

$$y = x^n$$

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

.....

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)...2.1 = n!$$

3.8. Công thức Leibnitz: Cho u, v là các hàm số có đạo hàm đến cấp n .

Khi đó ta có $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm cấp n tại điểm $x=0$ của hàm số $y = e^x \sin x$

$$\text{Giải: } (e^x \sin x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (\sin x)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin\left(x + k \frac{\pi}{2}\right) e^x$$

$$\text{Khi } x=0 \text{ thì } (e^x \sin x)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$$

Các công thức đạo hàm cấp cao cơ bản:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(x^m)^{(m-n)}$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, a > 0$$

Ví dụ 2: Tính $\left[e^x \cdot (x^2 + 3x + 1)\right]^{(10)}$. Ta có $\left[e^x \cdot (x^2 + 3x + 1)\right]^{(10)} =$

$$= C_{10}^0 (e^x)^{(10)} (x^2 + 3x + 1) + C_{10}^1 (e^x)^{(9)} (x^2 + 3x + 1)' +$$

$$+ C_{10}^2 (e^x)^{(8)} (x^2 + 3x + 1)'' + C_{10}^3 (e^x)^{(7)} (x^2 + 3x + 1)''' =$$

$$= C_{10}^0 \cdot e^x (x^2 + 3x + 1) + C_{10}^1 e^x (2x + 3) + C_{10}^2 e^x (2) + C_{10}^3 e^x \cdot 0$$

$$= e^x [x^2 + 3x + 1 + 10(2x + 3) + 90] = e^x (x^2 + 23x + 121) \quad \blacksquare$$

Ví dụ 3: Cho $g(x) = (x^2 - 1)^n, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh:

a/ Với mọi $k: 0 \leq k < n$ thì $g^{(k)}(1) = 0$ và $g^{(k)}(-1) = 0$

b/ Với $k = n$ thì $g^{(n)}(1) = 2^n n!$ và $g^{(n)}(-1) = 2^n n!(-1)^n$

Ta chứng minh hoàn toàn bằng qui nạp:

$$\begin{aligned} \text{a/ Với mọi } k < n \text{ thì } g^{(k)}(x) &= \left[(x^2 - 1)^{n-1} (x^2 - 1) \right]^{(k)} = \\ &= \left[(x^2 - 1)^{n-1} \right]^{(k)} (x^2 - 1) + \underbrace{C_k^{k-1} \left[(x^2 - 1)^{n-1} \right]^{(k-1)}}_{=0} (x^2 - 1)^{(1)} + \\ &+ \underbrace{C_k^{k-2} \left[(x^2 - 1)^{n-1} \right]^{(k-2)}}_{=0} (x^2 - 1)^{(2)}, \text{ thế } x=1, \text{ có 3 số hạng, số hạng thứ} \end{aligned}$$

nhất bằng 0 do $(x^2 - 1) \Big|_{x=1} = 0$, số hạng thứ hai bằng 0 do giả thiết qui

nap $k-1 < n-1$, số hạng thứ ba bằng 0 cũng do giả thiết qui nạp $k-2 < n-1$.
tương tự thế $x=-1$ cũng thế.

b/ Giả thiết đúng với $n-1$, đặt $h(x) = (x^2 - 1)^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{thì } g^{(n)}(x) &= \left[(x^2 - 1)^{n-1} (x^2 - 1) \right]^{(n)} = \left[h(x)(x^2 - 1) \right]^{(n)} = \\ &= \left[h(x) \right]^{(n)} (x^2 - 1) + C_n^{n-1} \left[h(x)^{n-1} \right]^{(n-1)} (x^2 - 1)^{(1)} + \\ &+ \underbrace{C_n^{n-2} \left[h(x) \right]^{(n-2)}}_{=0} (x^2 - 1)^{(2)}, \text{ thế } x=1, \text{ số hạng thứ nhất bằng 0 do} \end{aligned}$$

$(x^2 - 1) \Big|_{x=1} = 0$, số hạng thứ ba bằng 0 do giả thiết qui nạp ở phần a,

$n-2 < n-1$, chỉ còn số hạng thứ hai theo giả thiết qui nạp chúng bằng
 $C_n^{n-1} \left[h(x)^{n-1} \right]^{(n-1)} (x^2 - 1)^{(1)} = n \times \left[2^{n-1} (n-1)! \right] \times 2 \times 1 = 2^n n!$. tương
tự thế $x=-1$. ■

3.9. Định nghĩa 2: Cho hàm số

$f: D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D, \Delta x = x - x_0, x_0 + \Delta x \in D$. Hàm số f được gọi là khả
vi tại x_0 nếu số gia Δy có thể viết được dưới dạng

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + O(\Delta x)$. Trong đó A là số thực và

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

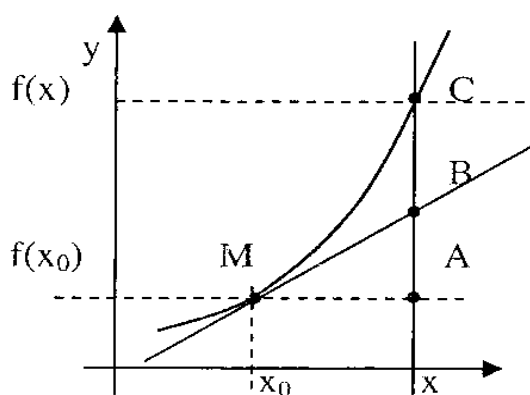
Biểu thức $A\Delta x := df(x_0)$ được gọi là vi phân của f tại x_0 .

Ví dụ: Hàm số $y = f(x) = x^2$ khả vi tại mọi x_0 thuộc \mathbf{R} . Thật vậy

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = A\Delta x + O(\Delta x)$$

Trong đó $2x_0 = A$ và $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) = 0$

Ý nghĩa hình học của vi phân: Vẽ đồ thị và ta có các kết quả sau:



$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = \overline{AC}, \quad dy = \overline{AB} = \text{tg} \alpha \cdot dx = f'_{x_0} \cdot dx$$

$$\overline{BC} = O(\Delta x) \quad \text{Vậy } \Delta f = A \cdot \Delta x + O(\Delta x) \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

khi $\Delta x = (x - x_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$, thì \overline{AC} giảm, kéo theo \overline{AB} giảm theo tuyến tính theo Δx (giảm từ từ theo Δx), trong khi $\overline{BC} = O(\Delta x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx , nên nó giảm phi tuyến nhanh hơn một bậc so với sự giảm của $\Delta x \rightarrow 0$.

3.10. Định nghĩa 3: Hàm số f có đạo hàm cấp n tại x_0 .

Vi phân cấp n của f tại x_0 là biểu thức $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n$.

3.11. Liên hệ giữa vi phân và đạo hàm: Hàm số f khả vi tại x_0 khi và chỉ khi f có đạo hàm tại x_0 . Khi đó số thực A nói trong định nghĩa chính là $f'(x_0)$.

BÀI TẬP

3.1. Áp dụng định nghĩa tính đạo hàm các hàm số sau tại điểm x_0 đã chỉ ra:

a) $f(x) = \sqrt[5]{4 + 5x^4}, \quad x_0 = 0;$ b) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}, \quad x_0 = 0.$

c) $f(x) = 2^{2x}, \quad x_0 = 0.$

3.2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$

a) Tìm A để hàm số liên tục tại $x=0$.

b) Với A vừa tìm được tính đạo hàm tại $x=0$.

3.3. Chứng minh các **định lý 1, 2, 3, công thức Leibnitz**.

3.4. Chứng minh hàm số f được khả vi tại x_0 khi và chỉ khi f có đạo hàm tại x_0

3.5. Tính đạo hàm cấp 1, 2 các hàm số sau đây:

a) $f(x) = \sqrt[5]{1+5x^6}$ b) $f(x) = \cos^2 2x$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$ d) $f(x) = e^{x^2+3x}$.

3.6. Tính vi phân cấp 1, 2 các hàm số ở bài 3.5.

3.7. Tính đạo hàm cấp n các hàm số:

a. $\sin x$ b. $\cos x$; c. e^{ax} d. $\frac{1}{x+1}$

e. $\ln(1+x)$ f. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

3.8. Chứng minh công thức Leibnitz.

3.9. Tính: a/ $[(x^2+3x).\sin x]^{(100)}$, b/ $\left(\frac{e^x}{x}\right)^{(20)}$

3.10. Chứng minh: (HD: chia phân số $\frac{f}{g} = h + \frac{u}{g}$ trước khi lấy đạo hàm)

$$\left(\frac{1}{1-u}\right)^{(n)} = \frac{n!(-1)^{n+1}}{(1-u)^{n+1}} \qquad n \geq 2: \left(\frac{u}{1-u}\right)^{(n)} = \frac{n!(-1)^{n+1}}{(1-u)^{n+1}}$$

$$n \geq 3: \left(\frac{u^2}{1-u}\right)^{(n)} = \frac{n!(-1)^{n+1}}{(1-u)^{n+1}} \qquad n \geq 4: \left(\frac{u^3}{1-u}\right)^{(n)} = \frac{n!(-1)^{n+1}}{(1-u)^{n+1}},$$

$$n \geq 5: \left(\frac{u^4}{1-u}\right)^{(n)} = \frac{n!(-1)^{n+1}}{(1-u)^{n+1}} \qquad \left(\frac{u^{n-1}}{1-u}\right)^{(n)} = \frac{n!(-1)^{n+1}}{(1-u)^{n+1}}$$

BÀI 4: ỨNG DỤNG CỦA SỰ LIÊN TỤC VÀ KHẢ VI

4.1 Định nghĩa :

x_0 gọi là điểm tới hạn nếu $f'(x_0) = 0$.

x_0 gọi là điểm cực tiểu địa phương, nếu $f(x_0) \leq f(x) \forall x$ trong lân cận x_0 .

x_0 gọi là điểm cực đại địa phương, nếu $f(x_0) \geq f(x) \forall x$ trong lân cận x_0 .

4.2 Định lý(Fermat) (điều kiện cần cực trị):

hàm $f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 \Rightarrow x_0$ là điểm tới hạn.

4.3 Định lý (điều kiện đủ cực trị) :

x_0 là điểm tới hạn và $f''(x_0) \neq 0$, cụ thể ta có:

1/ $f''(x_0) > 0$ thì hàm $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

2/ $f''(x_0) < 0$ thì hàm $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

4.4 Định lý: Cho hàm số $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục khi đó f bị chặn trên $[a,b]$ tức là $\exists M > 0; \forall x \in [a,b], |f(x)| \leq M$

4.5 Định lý: Cho hàm số $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục khi đó f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a,b]$ tức là: $\exists x_1, x_2 \in [a,b]:$

$$f(x_1) = \min\{f(x)/x \in [a,b]\} = m$$

$$f(x_2) = \max\{f(x)/x \in [a,b]\} = M$$

Đồng thời nếu $m \leq y_0 \leq M$ thì luôn tìm được $c \in [a,b]: y_0 = f(c)$.

Ví dụ 1: Các hàm số $f(x) = \tan x; \cot x$ xét trên đoạn: $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ liên tục và đạt giá trị lớn nhất; nhỏ nhất.

Tuy nhiên nếu xét trên $(0, \frac{\pi}{2})$ thì chúng chỉ liên tục mà không bị chặn.

Ví dụ 2: Xét hàm số $f(x) = x^3 + 25x$ xét f trên $[0,2]$ thì f liên tục và đạt giá trị lớn nhất; nhỏ nhất. Tuy nhiên nếu xét trên $[0, +\infty)$ thì f chỉ liên tục mà không bị chặn trên.

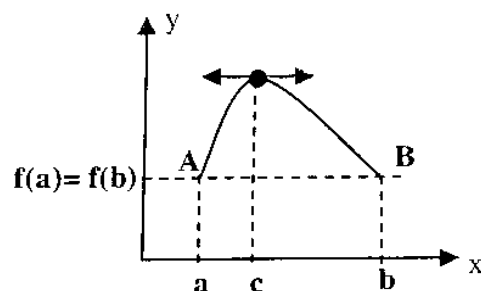
4.6 Định lý Rolle: Cho hàm $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

i/ f liên tục trên $[a,b]$

ii/ f khả vi trong (a,b)

iii/ $f(a) = f(b)$.

Khi đó tồn tại $c \in (a,b): f'(c) = 0$.



4.7 Định lý Lagrăng:

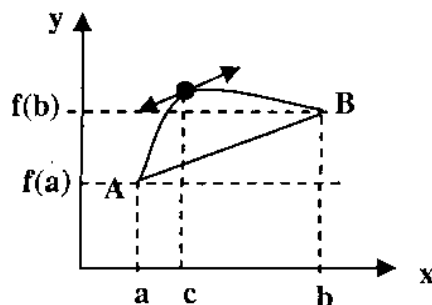
Cho hàm số $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, thoả hai điều kiện:

i/ f liên tục trên $[a,b]$

ii/ f khả vi trong (a,b)

Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Ví dụ 1: Cho $f(x) = \ln x$ trên $[1,e]$. tìm số c để f liên tục trên $[1,e]$, khả vi trong $(1,e)$.

Theo định lý Lagrange $\exists c \in (1,e)$: $f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow c = e - 1$$

Ví dụ 2: Cho ba số a, b, c thoả : $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$

Chứng minh phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm thuộc $(0,1)$.

Xét $f(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx$ trên $[0,1]$

Ta có f liên tục trên $[0,1]$; khả vi trong $(0,1)$

$f(0) = f(1) = 0$ nên theo định lý Rolle $\exists x_0 \in (0,1)$

sao cho $f'(x_0) = 0$, hay $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

4.8 Định lý Cauchy: Cho $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, thoả các điều kiện:

i/ f, g liên tục trên $[a,b]$

ii/ f, g khả vi trong (a,b)

iii/ $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)$

Khi đó luôn tìm được $c \in (a,b)$ sao cho : $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Dùng định lý Cauchy có thể dễ dàng khử một số dạng vô định khi phải tính giới hạn. Cụ thể ta có.

4.9 Quy tắc L'Hospital:

Giả sử các hàm số $f(x); g(x)$ thoả .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (hoặc ∞) và $f(x)$; $g(x)$ có đạo hàm tại những

điểm gần x_0 . Khi đó ta có: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x} = 1$

4.10 Công thức Taylor: Cho hàm f có đạo hàm đến cấp $n+1$ tại x_0 (đủ gần x_0) ta có thể viết :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Nếu $x_0 = 0$ ta có công thức Maclaurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Với $c \in (x_0, x)$ hay (x, x_0) .

Ví dụ 1: Hàm $f(x) = e^x$ có khai triển Maclaurin:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

hay $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$

Bằng cách dùng công thức ở trên ta có các công thức khai triển cơ bản sau:

1/ $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots; |z| < 1$

2/ $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots; \forall z$

3/ $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots + \dots - \dots; \forall z$

4/ $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \dots + \dots \forall z$

5/ $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \dots + \dots + \dots; \forall z$

$$6/ \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \dots + \dots + \quad \forall z$$

$$7/ \arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \dots + \quad |z| < 1$$

$$8/ \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{(n+1)} = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots + \dots; |z| < 1$$

$$9/ \ln(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-z)^{n+1}}{(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1} z^{n+1}}{(n+1)} =$$

$$= -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \dots - \dots - \dots \quad |z| < 1$$

$$10/ \ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} = 2 \left[\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \dots + \dots + \dots \right]; |z| < 1$$

$$11/ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots; |x| < 1$$

$$12/ \ln(1+1) = \ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{n+1}}{(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \dots - \dots$$

$$13/ \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \dots - \dots$$

$$14/ \tan x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots; |x| < 1$$

$$15/ \arctan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots; |x| < 1$$

$$16/ \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + 0(x^6);$$

Ví dụ 2: Cho hàm $y=y(x)$ được cho bởi: (*) $\begin{cases} x = \ln(t+e) \\ y = t^3 \end{cases}$, hãy tìm vô

cùng bé tương đương khi $x \rightarrow 1$.

Từ $\begin{cases} x = \ln(t+e) \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow y = (e^x - e)^3$, bây giờ ta khai triển hàm này tại

điểm điểm $x=1$. Ta có:

$$y = (e^x - e)^3 = e^3 (e^{x-1} - 1)^3 = e^3 (1 + [x-1] + \dots - 1)^3 \approx e^3 (x-1)^3$$

Trường hợp tổng quát (*) không giải được theo t, thì phải làm chân phương theo khai triển Taylor:

$$y(x) = y(1) + y'_x(1)(x-1) + \frac{y''_x(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{y'''_x(1)(x-1)^3}{3!} + \dots \quad \text{và}$$

các đạo hàm $y_x^{(i)}(1)$ tính qua hàm ẩn t: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, y''_x = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2} \dots$

Trong trường hợp trên ta có thể thử lại $y'_x(1) = 0 = y''_x(1), y'''_x(1) = 6e^3$

4.11 Dùng khai triển Taylor để tính các giới hạn:

Chú ý khi khai triển Taylor hoặc Maclaurin, số hạng

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = R_n = o(x^n) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}x - x}{x^3}$

Khai triển Maclaurin hàm $f(x)=\text{tg}x$ đến bậc 3

$$f'(x)=1+\text{tg}^2x \Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=2\text{tg}x(1+\text{tg}^2x) \Rightarrow f''(0)=0$$

$$f'''(x)=2(1+\text{tg}^2x)^2+4\text{tg}^2x(1+\text{tg}^2x) \Rightarrow f'''(0)=2$$

$$\text{Như vậy } \text{tg}x=f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$\text{Hay } \text{tg}x = x + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{3}.$$

4.12 Mở rộng định lý điều kiện đủ để hàm số có cực trị:

Cho hàm f có đạo hàm đến cấp n tại x_0 ($n > 1$) thỏa:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0. \text{ Khi đó:}$$

- i/ Nếu n lẻ, f(x) không đạt cực trị tại x_0
- ii/ Nếu n chẵn và $f^{(n)}(x_0) > 0$ thì f(x) đạt cực tiểu tại x_0
- iii/ Nếu n chẵn và $f^{(n)}(x_0) < 0$ thì f(x) đạt cực đại tại x_0

Chú ý: ta thường sử dụng định lý này với $n=2$.

Định lý này có thể dùng công thức Taylor để chứng minh.

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\
&+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \\
&= 0 + 0 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \\
&= \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left[f^{(n)}(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}(x-x_0) \right]
\end{aligned}$$

- Giả sử n chẵn, $f^{(n)}(x_0) > 0$

$$\text{vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}(x-x_0) = 0$$

$$\text{nên có vùng cận } x_0 \text{ để có: } \left[f^{(n)}(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}(x-x_0) \right] > 0$$

Vậy $f(x) > f(x_0)$ i.e x_0 là điểm cực tiểu.

- Giả sử n chẵn, $f^{(n)}(x_0) < 0$, thì lý luận tương tự.

Vậy $f(x) - f(x_0) < 0$ i.e x_0 là điểm cực tiểu.

- Giả sử n lẻ: Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}(x-x_0) = 0$

$$\text{Có vùng cận } x_0 \text{ để có: } \left[f^{(n)}(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}(x-x_0) \right] \text{ cùng dấu}$$

với $f^{(n)}(x_0)$ Lúc đó dấu của $[f(x) - f(x_0)]$ phụ thuộc vào dấu của $(x-x_0)^n$, nghĩa là nó thay đổi dấu khi qua x_0 , vậy nó không có cực trị.

BÀI 5: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM

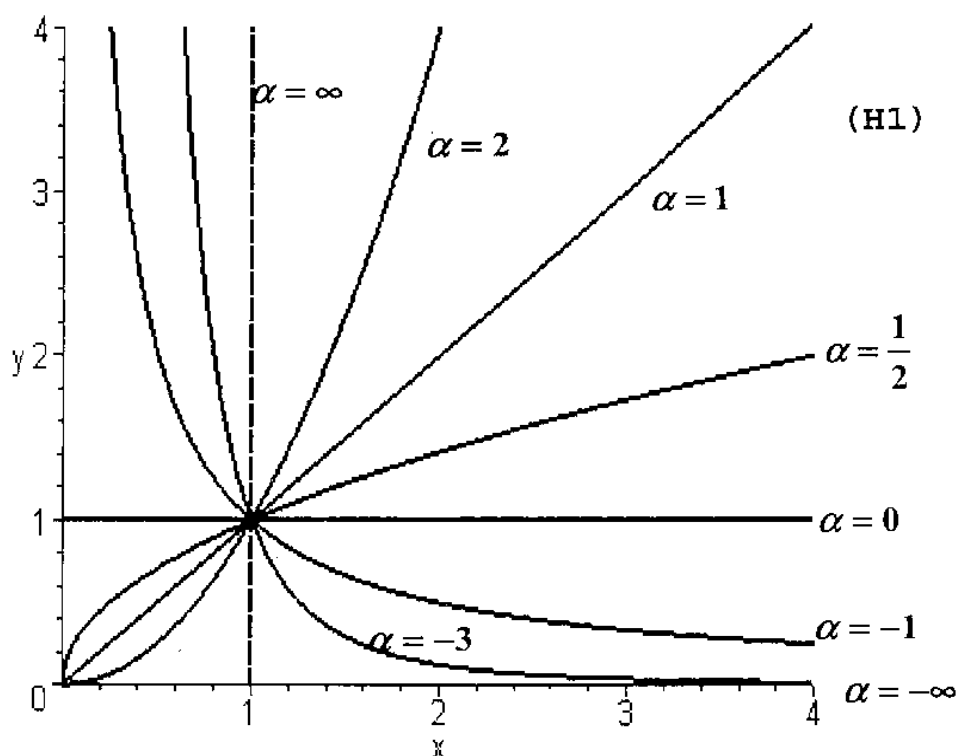
Trước tiên ta có các đồ thị các hàm cơ bản sau: (sinh viên tự khảo sát)

5.1 Các hàm số sơ cấp

1/ Hàm hằng : $y = f(x) = \text{const } \forall x$ MXĐ : \mathbb{R}

2/ Hàm lũy thừa : $y = x^\alpha$ MXĐ : phụ thuộc vào α .

có đồ thị như sau:



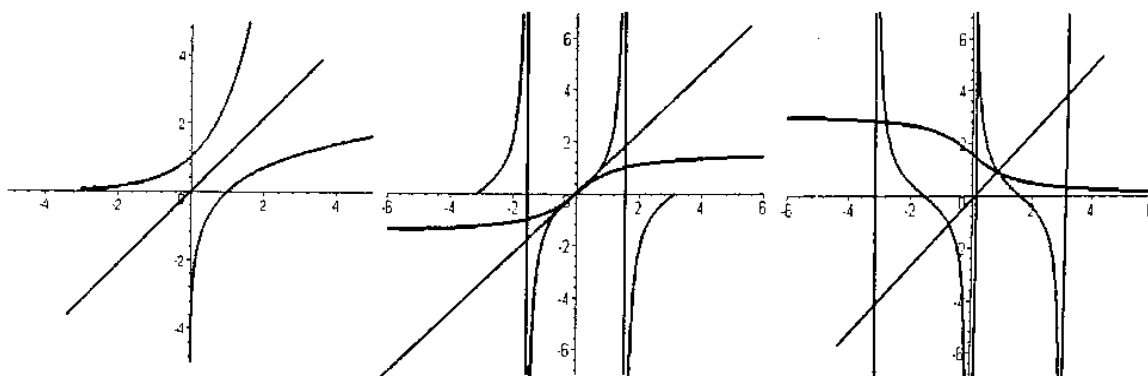
3/Hàm mũ . $y = a^x, a > 1, a \neq 1$ MXĐ: \mathbb{R} , (H2)

Hàm logarit $\log_a x, a > 1, a \neq 1$. MXĐ: $D=(0, +\infty)$, (H2)

Hàm mũ : $y = a^x, 0 < a < 1, a \neq 1$ MXĐ: \mathbb{R} , (H15)

Hàm logarit . $\log_a x, 0 < a < 1, a \neq 1$. MXĐ: $D=(0, +\infty)$, (H15)

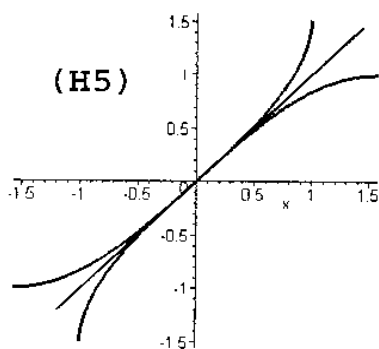
Chú ý: Các hàm ngược nhau đối xứng qua đường $y=x$.



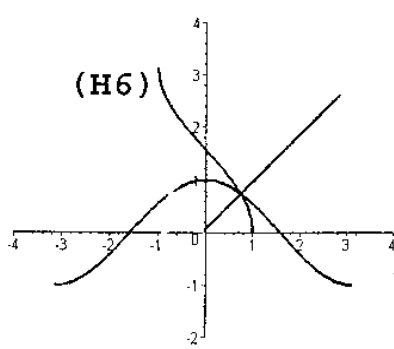
(H2)

(H3)

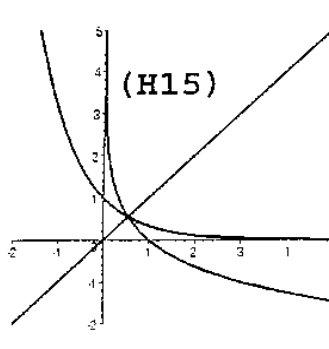
(H4)



(H5)



(H6)



(H15)

46 Chương 2: Phép tính vi phân hàm một biến.

4/ $y = \operatorname{tg}x$, MXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{x / x = (2k+1)\pi/2\}$, (H3)

$y = \operatorname{arctg}x$ MXĐ: \mathbb{R} , $y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ (H3)

5/ $y = \operatorname{cotg}x$, MXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{x / x = k\pi\}$ (H4)

$y = \operatorname{arccotg} x$ MXĐ: \mathbb{R} $y \in]0, \pi[$ (H4)

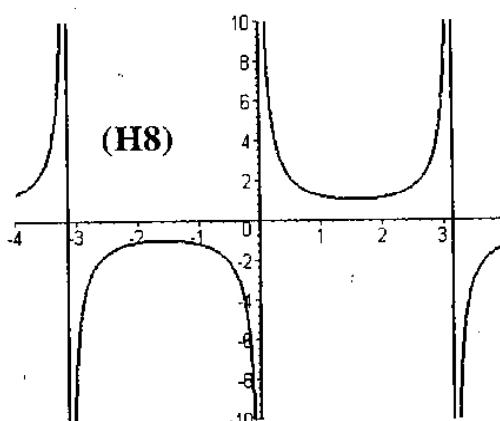
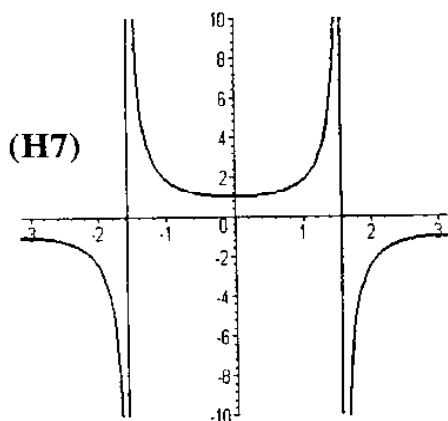
6/ $y = \sin x$, MXĐ: \mathbb{R} , (H5)

$y = \operatorname{arcsin}x$ MXĐ: $[-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ (H5)

7/ $y = \cos x$ MXĐ: \mathbb{R} , (H6)

$y = \operatorname{arccos} x$ MXĐ: $[-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$ (H6)

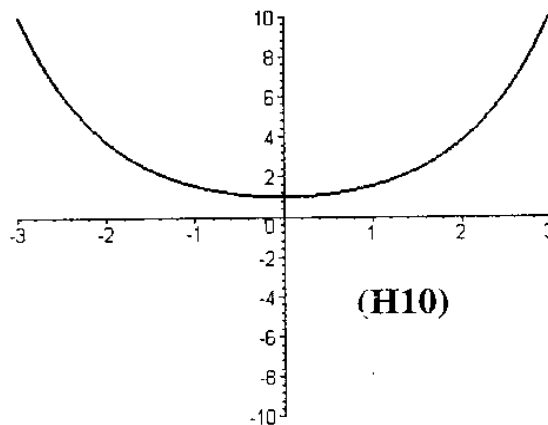
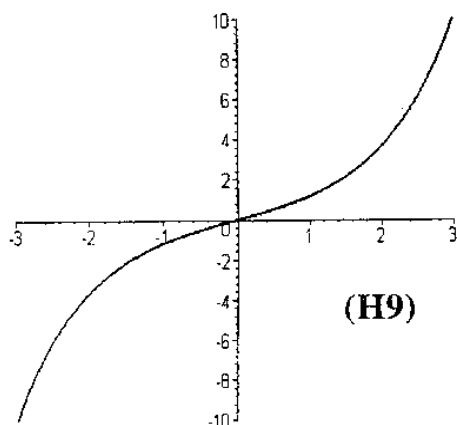
8/ $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ MXĐ: $\mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$ Hàm chẵn (H7)



Hàm chẵn. Đồ thị có tung độ đỉnh là $y=1$, (H7)

9/ $y = \operatorname{csc}x = \frac{1}{\sin x}$ MXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, Hàm lẻ (H8)

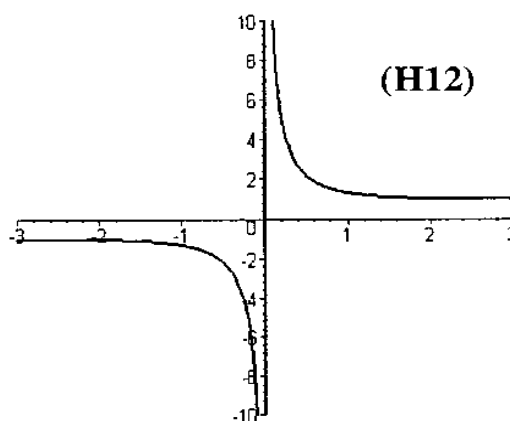
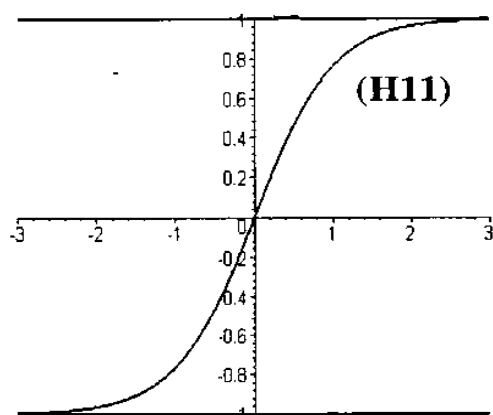
10/ $y = \operatorname{sinh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ MXĐ: \mathbb{R} , hàm lẻ (H9)



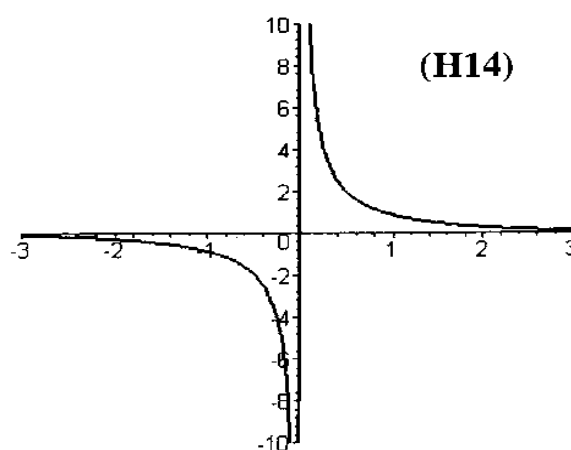
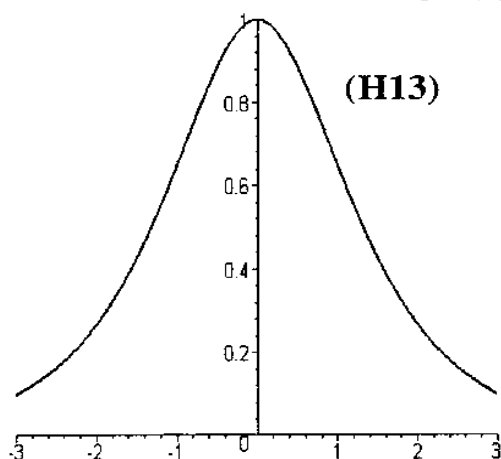
$$11/ y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{MXĐ : } \mathbb{R}, \text{ hàm chẵn} \quad (\text{H10})$$

$$12/ y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{MXĐ : } \mathbb{R}, \text{ hàm lẻ} \quad (\text{H11})$$

$$13/ y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \text{MXĐ : } \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ hàm lẻ} \quad (\text{H12})$$



$$14/ y = \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{MXĐ : } \mathbb{R}, \text{ hàm chẵn} \quad (\text{H13})$$



$$15/ y = \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad \text{MXĐ : } \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ hàm lẻ} \quad (\text{H14})$$

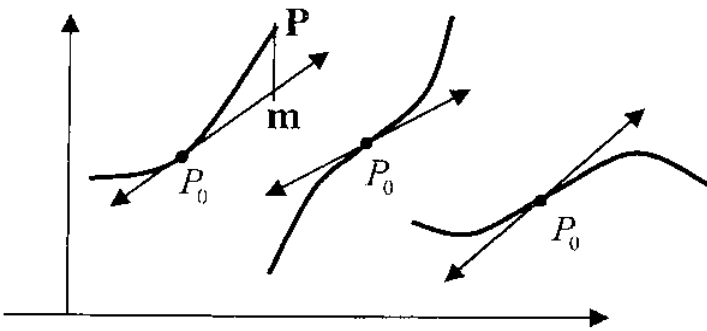
5.2 Các đường $y = y(x)$:

- Trước hết ta hãy tìm chu kỳ hàm số nếu có, tìm các điểm đối xứng của đường biểu diễn và suy ra khoảng cần khảo sát.
- Dấu của của đạo hàm y' sẽ chỉ chiều biến thiên của y . đạo hàm y' cũng là độ dốc của tiếp tuyến với đường biểu diễn, độ dốc này sẽ tăng hay giảm tùy vào dấu của y'' .

Nếu $y'' > 0$, độ dốc tăng, đường biểu diễn có bề lõm hướng về phía trên. Nếu $y'' < 0$, độ dốc giảm, đường biểu diễn có bề lõm hướng về phía dưới. Nếu $y'' = 0$, độ dốc qua cực trị, đường biểu diễn có 1 điểm uốn.

- Ta có thể dùng công thức Taylor để khảo sát đường biểu diễn gần điểm $P_0(x_0, y_0)$. Tung độ của điểm P gần P_0 là .

$$y = y_0 + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 + \dots$$



$$\overline{mP} = \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 + \dots \text{ vậy nếu } y'' \neq 0, \overline{mP} \text{ có cùng dấu với nó } (y''),$$

đường biểu diễn ở trên hay ở dưới tiếp tuyến tùy theo y'' dương hay âm.

- Trường hợp $y'' = 0$, \overline{mP} tương đương với $\frac{(x - x_0)^3}{2!} y''_0$, nó sẽ thay dấu theo $(x - x_0)$ và đường biểu diễn sẽ vượt qua tiếp tuyến tại P_0 . Điểm này là điểm uốn (uốn lên hay uốn xuống tùy theo y''' dương hay âm).

Ví dụ 1: Khảo sát cubic bậc ba $y = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$, $y' = \frac{3x^2 - 12x}{3[x^2(x-6)]^{\frac{2}{3}}}$,

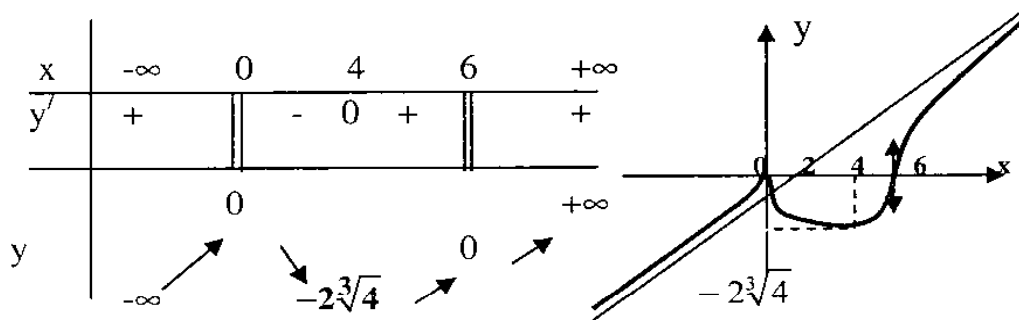
dấu là dấu $x(x-4)$.

- Điểm ở vô cực: x và y cùng hướng về vô cực, coi tỷ số $\frac{y}{x}$ bằng cách khai triển theo $\frac{1}{x}$, tiệm cận xiên là $g=x-2$, do ta khai triển ở vô cực:

$\frac{y}{x} = \left(1 - \frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \dots$, như vậy $\frac{y}{x}$ hướng về 1 và phương tiệm cận là phân giác thứ nhất. Ta cũng có thể viết $y = x - 2 - \frac{4}{x} + \dots$, suy ra khi $x \rightarrow +\infty$, đường tiệm cận ở trên đường biểu diễn, và ngược lại khi $x \rightarrow -\infty$, đường tiệm cận ở dưới đường biểu diễn.

• Điểm ở gốc O y' có dạng vô định $\frac{0}{0}$, ta hãy xét giới hạn của $\frac{y}{x}$, từ biểu thức trên dễ dàng thấy $\frac{y}{x} \rightarrow -\infty$, khi $x \rightarrow 0^+$, và $\frac{y}{x} \rightarrow +\infty$, khi $x \rightarrow 0^-$, điểm O gọi là điểm lồi.

Bảng biến thiên và đồ thị:



Ví dụ 2: Tìm giá trị của m: phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt:

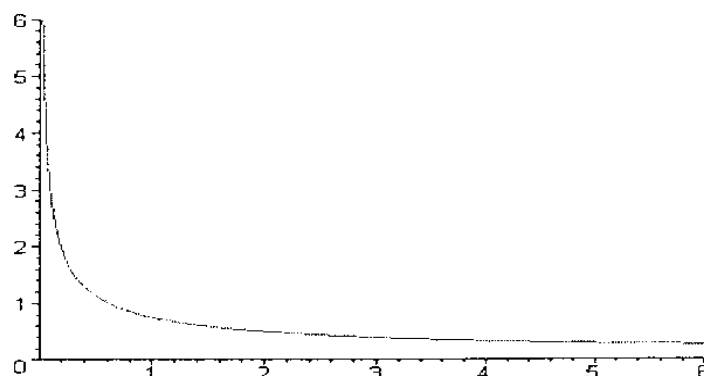
$$f(x) = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m$$

Giải:

Đặt hàm: $g(u) = \sqrt[4]{u} + \sqrt{u}$ hàm dương tăng nghiêm cách, theo biến u

dương, có đạo hàm: $g'(u) = \frac{1}{4u^{3/4}} + \frac{1}{2u^{1/2}}$ là một hàm giảm nghiêm cách

(xem hình)



$$f(x) = g(2x) + 2g(6-x) \Rightarrow f'(x) = 2g'(2x) - 2g'(6-x) = 0$$

$$\Rightarrow g'(2x) = g'(6-x) \Rightarrow 2x = 6-x \Rightarrow x = 2$$

trong khoảng từ $[0,2]$ ta có $(2x) < (6-x)$

$$\Rightarrow g'(2x) > g'(6-x) \Rightarrow f'(x) = 2g'(2x) - 2g'(6-x) > 0$$

x	0	2	6
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			-
	$2g(6) = 8.02$	$3g(4)$	$g(12) = 5.32$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Rightarrow 2g(6) = 2(\sqrt[4]{6} + \sqrt{6}) \leq m < 3g(4) = 3(\sqrt[4]{4} + \sqrt{4})$$

5.3 Các đường $y = y(t)$, $x = x(t)$;

• Dấu của đạo hàm y' , x' sẽ chỉ chiều biến thiên của y và x . Các đại lượng y' , x' cũng là hệ số tiếp tuyến. Độ dốc của tiếp tuyến là

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ Độ dốc này sẽ tăng hay giảm (khi } x \text{ tăng) tùy}$$

theo đạo hàm $\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2}$ dương hay âm. Như vậy đường biểu

diễn sẽ hướng bẻ lõm về phía trên khi $x'y'' - y'x'' > 0$ và về phía dưới khi $x'y'' - y'x'' < 0$. Khi $x'y'' - y'x'' = 0$, đường biểu diễn có một điểm uốn.

• Ta cũng có thể lý luận như sau: gần điểm $P_0(x_0, y_0)$, ta khai triển

$$\text{Taylor. (*) } P = \begin{cases} x = x_0 + (t - t_0)x'_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2!}x''_0 + \dots & (1) \\ y = y_0 + (t - t_0)y'_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2!}y''_0 + \dots & (2) \end{cases}$$

Đó chính là tọa độ của điểm P gần P_0 trên đường biểu diễn. nếu x'_0, y'_0 không cùng triệt tiêu (điểm P_0 là điểm thường), $\overline{P_0P}$ có thành phần tương đương với $(t - t_0)x'_0, (t - t_0)y'_0$, ta thấy rằng x'_0, y'_0 là hệ số chỉ phương của tiếp tuyến tại điểm thường P_0 . Nếu $x'_0 = 0, y'_0 = 0$ và x''_0, y''_0 không cùng triệt tiêu thì $\overline{P_0P}$ có thành phần tương đương với $\frac{(t - t_0)^2}{2!}x''_0, \frac{(t - t_0)^2}{2!}y''_0$, và x''_0, y''_0 là hệ số chỉ phương của tiếp tuyến tại điểm bất thường P_0 . Nếu x''_0, y''_0 cùng triệt tiêu ta sẽ phải dùng đến đạo hàm kế tiếp. Bây giờ xét vị trí của điểm P với tiếp tuyến P tại P_0 .

- P_0 là điểm thường: tiếp tuyến T tại P_0 .

$$-y'_0(x-x_0) + x'_0(y-y_0) = 0.$$

P sẽ ở phía này hay phía kia của T tùy theo biểu thức:

$$-y'_0 \left[(t-t_0)x'_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} x''_0 + \dots \right] + x'_0 \left[(t-t_0)y'_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} y''_0 + \dots \right] =$$

$$= \frac{(t-t_0)^2}{2!} (x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0) \dots \text{ dương hay âm.}$$

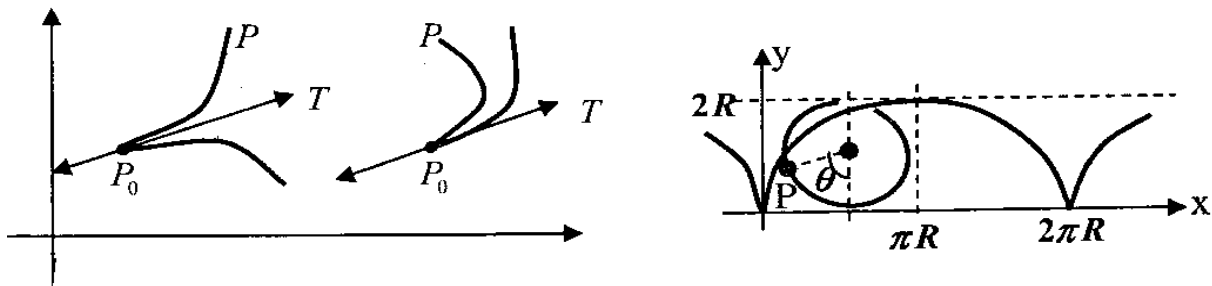
- Nếu $(x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0) \neq 0$ kết quả có một dấu nhất định và vì thế đường biểu diễn chỉ có thể ở một phía đối với T (thường gặp ở các hàm sơ cấp).
- Nếu $(x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0) = 0$ ta phải dùng đến số hạng chứa $\frac{(t-t_0)^3}{3!}$, số

hạng này đổi dấu theo $t-t_0$ và đường biểu diễn xuyên qua T ở P_0 (P_0 là điểm uốn, thường gặp ở các hàm sơ cấp). P_0 là điểm bất thường

($x'_0 = 0, y'_0 = 0$): tiếp tuyến T tại P_0 (do (*)): $-y''_0(x-x_0) + x''_0(y-y_0) = 0$

Lý luận tương tự như trên, ta thấy là đường biểu diễn xuyên qua T nếu $(x'_0 y'''_0 - y'_0 x'''_0) \neq 0$. Và ở một phía đối với T nếu $(x'_0 y'''_0 - y'_0 x'''_0) = 0$.

Mặt khác xét vị trí của P đối với bất kỳ đường thẳng D nào qua P_0 khác T, không cắt đường biểu diễn ở điểm nào cả ngoài P_0 , ta cũng thấy là P chỉ có thể ở một phía đối với nó. Đường biểu diễn do đó phải có một dạng lồi ở P_0 tùy theo $(x'_0 y'''_0 - y'_0 x'''_0)$ khác 0 hay bằng 0 ta sẽ có điểm lồi loại 1 hay loại 2 như nêu ở hình dưới đây.



Ví dụ 1:

Khảo sát đường cycloid có phương trình $\begin{cases} x = R(\theta - \sin \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases}$ (**)

- Xét x, y , thấy rằng đổi θ thành $\theta + 2\pi$, x đổi thành $x + 2\pi R$, trong khi y không đổi, vậy ta chỉ cần khảo sát trong một khoảng 2π , rồi bỏ túc bởi những phép tịnh tiến $2k\pi R$ theo Ox. Ngoài ra khi đổi θ thành $-\theta$ ta thấy x đổi thành $-x$, trong khi y không đổi, vậy ta có thể khảo sát trong khoảng 0 đến π , rồi bỏ túc bởi đối xứng với Oy, sau đó bỏ túc toàn thể bằng tịnh tiến.

- Đạo hàm $\begin{cases} x' = R(1 - \cos \theta) \\ y' = R \sin \theta \end{cases}$

θ	0	π
x'	0	+
x	0	\nearrow
y	0	\nearrow
y'	0	+

I

- Thật ra vấn đề vẽ quỹ đạo của 1 điểm P ở trên vòng tròn bán kính R, khi vòng tròn này lăn không trượt, góc θ như hình vẽ, chiều $\overline{OP} = \overline{OI} + \overline{IP}$ trên Ox và Oy ta thu được phương trình (**) quỹ đạo của P. Như hình vẽ dưới đây:



Ví dụ 2:

Sinh viên hãy khảo sát 5 nhánh hàm sau, chúng sẽ tạo thành đồ thị như hình bên: (H1)

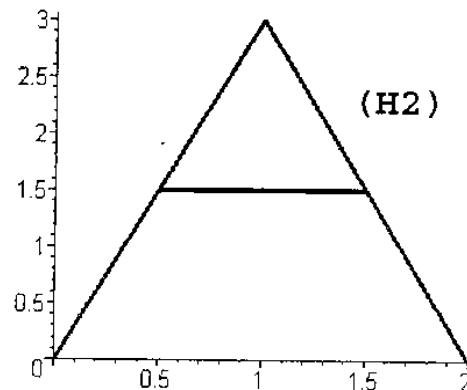
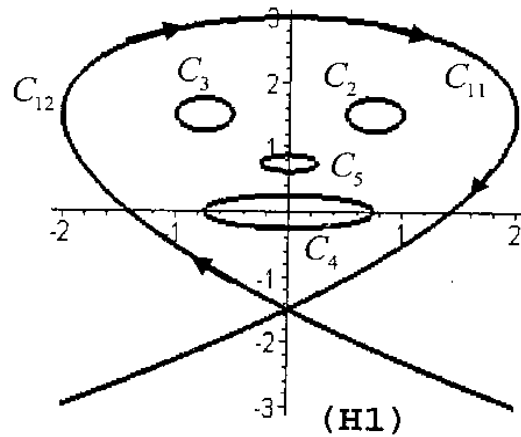
$$C_1: \begin{cases} x = 2 \sin 3t, y = 3 \cos 2t \\ \underbrace{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0}_{C_{12}}, \underbrace{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}}_{C_{11}} \end{cases}$$

$$C_2: \begin{cases} x = \frac{1}{4} \cos t + \frac{3}{4}, y = \frac{1}{4} \sin t + \frac{3}{2} \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$C_3: \begin{cases} x = \frac{1}{4} \cos t - \frac{3}{4}, y = \frac{1}{4} \sin t + \frac{3}{2} \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$C_4: \begin{cases} x = \frac{3}{4} \cos t, y = \frac{1}{4} \sin t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$C_5: \begin{cases} x = \frac{1}{4} \cos t, y = \frac{1}{8} \sin t + \frac{3}{4} \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$



Ví dụ 3:

Sinh viên hãy khảo sát 3 nhánh hàm sau, chúng sẽ tạo thành đồ thị chữ A như hình trên: (H2)

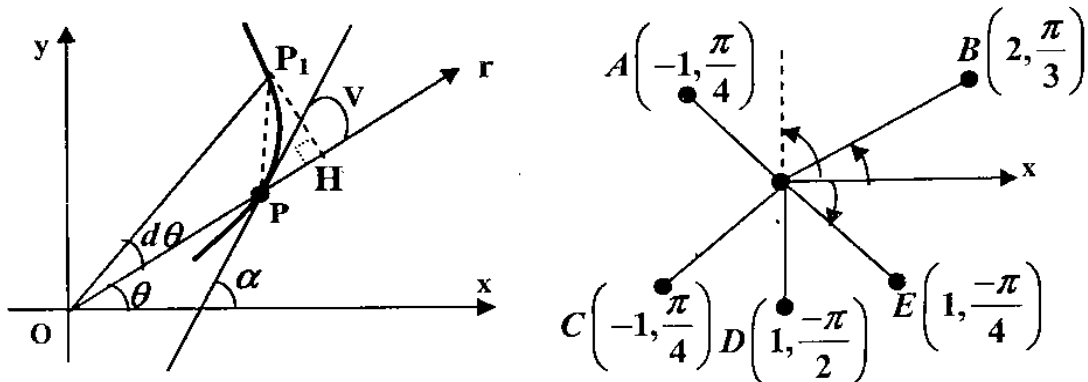
$$C_1: \begin{cases} x = \tan t, y = 3 \tan t \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad C_2: \begin{cases} x = 1 + \tan t, y = 3 - 3 \tan t \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$C_3: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \tan t, y = \frac{3}{2} \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

5.4 Các đường $r = r(\theta)$: $y = y(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$

Chú ý hàm $r(\theta)$ có giá trị đại số chứ không phải giá trị hình học như ta vẫn thường hiểu. Cũng như trên bắt đầu ta vẫn khảo sát những tính chất như chu kỳ, đối xứng.... Về đối xứng, nếu đổi θ thành $-\theta$ mà r vẫn không đổi i.e có đối xứng với Ox, còn nếu r đổi dấu thì lại có đối xứng với Oy. Nếu đổi θ thành $\pi - \theta$ mà r không đổi là đối xứng với Oy, còn nếu r đổi dấu thì lại có đối xứng với Ox. Nếu $r(\pi - \theta) = -r(\theta) \rightarrow$ đối xứng qua Ox. Nếu đổi θ thành $\pi/2 - \theta$ mà r không đổi là đối xứng với phân giác thứ nhất, nếu r đổi dấu thì đối xứng với phân giác thứ hai. ..., từ đó suy ra một khoảng khảo sát thích nghi. Trong tọa độ cực ta kí hiệu $M(r, \theta)$, minh họa các tọa độ như hình dưới đây.

- Chiều biến thiên của r sẽ định bởi dấu r' , r'' cũng có thể dùng để định tiếp tuyến như sau:



Ta có $\overline{OP} = r$, $\overline{OP_1} = r_1 \approx r$, $dr \cong \overline{PH}$, $\operatorname{tg} V \approx \frac{P_1H}{PH} = \frac{rd\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{r}{r'}$,

ta cũng có thể thu được kết quả một cách khác: như hình vẽ

$$V = \alpha - \theta, \text{ và } \operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{(r \sin \theta)'}{(r \cos \theta)'} = \frac{r \cos \theta + r' \sin \theta}{-r \sin \theta + r' \cos \theta}$$

Sau một vài phép tính thế $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\operatorname{tg} \alpha$ như trên và ta có

$$\operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta} = \dots = \frac{r}{r'}$$

• Bây giờ xét vấn đề bề lõm, điểm uốn, độ dốc của tiếp tuyến đối với trục Ox cố định, biến thiên của $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(V + \theta)$, và đạo hàm này là:

$$y''_x = (\operatorname{tg} \alpha)' = [\operatorname{tg}(V + \theta)]' = \frac{V' + 1}{\cos^2(V + \theta)}, \text{ nhưng theo trên ta có}$$

$$V' = \left(\operatorname{arctg} \frac{r}{r'} \right)' = \frac{\left(\frac{r}{r'} \right)'}{1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2} = \frac{r'^2 - r r''}{r'^2 + r^2},$$

vậy đạo hàm trên có dấu của :

$$V' + 1 = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{r'^2 + r^2}, \text{ i.e của } r^2 + 2r'^2 - r r''.$$

Nếu $r^2 + 2r'^2 - r r'' > 0$ bề lõm hướng về phía trên.

Nếu $r^2 + 2r'^2 - r r'' < 0$ bề lõm hướng về phía dưới và nếu $r^2 + 2r'^2 - r r'' = 0$ ta có điểm uốn. Để ý là :

$$\left(\frac{1}{r} \right)'' + \left(\frac{1}{r} \right)' = \frac{2r'^2 - r r''}{r^3} + \frac{1}{r} = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{r^3}. \text{ Vậy nếu } r > 0, \text{ dấu của}$$

$r^2 + 2r'^2 - r r''$ cũng là dấu của $\left(\frac{1}{r} \right)'' + \left(\frac{1}{r} \right)'$ và ta có thể dùng tổng này

thay thế cho tổng số trên để định bề lõm. Nếu $r < 0$ ta vẫn có thể dùng tổng số ấy miễn là đổi dấu nó và lấy kết quả ngược lại. Điểm uốn cũng

được định bởi $\left(\frac{1}{r} \right)'' + \left(\frac{1}{r} \right)'$.

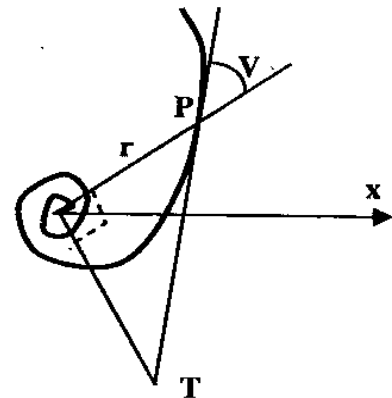
Ví dụ: Khảo sát spiral-loga (xoắn ốc loga).

Đây là phương trình quỹ đạo

phóng phi tuyến chiếu phẳng,

mà trong cơ học thiên thể đã được

thiết lập có phương trình $r = a e^{m\theta}$, $a > 0$,



Chương 2: Phép tính vi phân hàm một biến.

trong đó m là hằng số. Spiral-loga không có đối xứng nào, vậy ta cần khảo sát θ từ $-\infty$ đến $+\infty$, r sẽ đồng biến từ 0 đến $+\infty$. Có tiệm cận ở cực O, vì r chỉ triệt tiêu khi $\theta \rightarrow -\infty$, $r=a$ khi $\theta=0$, spiral cắt Ox tại điểm ấy.

Ở mọi điểm $\operatorname{tg}V=m$ không đổi, vậy tiếp tuyến luôn hợp với bán kính vectơ tương ứng một góc không đổi. đó là một đặc tính quan trọng của spiral loga. Một đặc tính khác mà spiral loga (sẽ hiểu rõ hơn ở chương tích phân) có được là độ dài cực O đến điểm P bất kỳ tỉ lệ với đoạn TP, T là giao điểm của tiếp tuyến với trục thẳng góc với OP (xem hình). Thật vậy cung nhỏ của spiral là

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{1+m^2} ae^{m\theta} d\theta$$

$$\text{cung}(OP) = \int_{-\infty}^{\theta} ds = \sqrt{1+m^2} \int_{-\infty}^{\theta} ae^{m\theta} d\theta = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} ae^{m\theta}$$

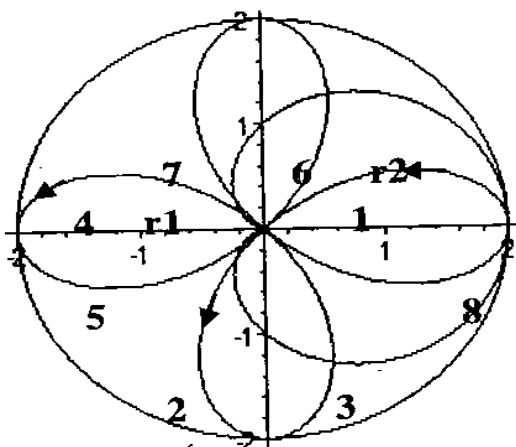
Mặt khác : $TP = \frac{r}{\cos V} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 V} r = \sqrt{1+m^2} ae^{m\theta}$, vậy cung (OP)

$$= \frac{TP}{m}, \text{ đặc biệt khi } m=1 \text{ cung}(OP)=TP.$$

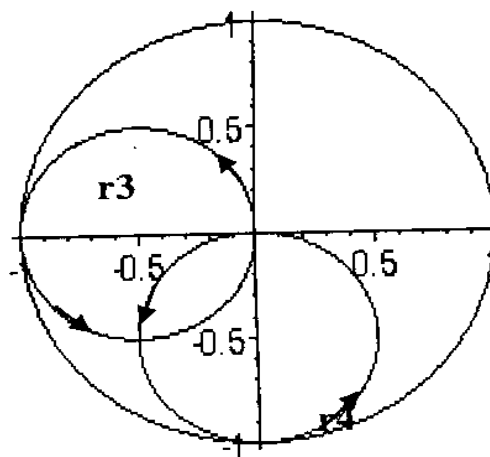
Ví dụ:

Đồ thị trong tọa độ cực của 4 hàm sau

H1: $r_1=2\cos 2\varphi$, $r_2=1+\cos\varphi$, H2: $r_3=-\cos\varphi$, $r_4=-\sin\varphi$



H1



H2

Biểu thức $\operatorname{tg}V$ để xác định góc V , là góc giữa của bán kính trục và tiếp tuyến tại điểm đó. Giúp ta vẽ độ cong tại điểm muốn khảo sát chính xác hơn trong tọa độ cực.

- Bảng biến thiên hàm $r_1 = 2\cos 2\varphi$, có chu kỳ là π , gồm 4 nhánh hoa, ta chỉ khảo sát một nhánh.

φ	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$r_1 = 2\cos 2\varphi$	0	↗ 2	↘	0
$\operatorname{tg}V = \frac{r_1}{r_1'} \leftrightarrow V$	$0 \leftrightarrow 0$	$\infty \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$	$0 \leftrightarrow 0$	$\infty \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$

thứ tự nhánh và chiều như H1. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 1$. Sinh viên tự kiểm chứng các góc V trên đồ thị H1.

$$r_1(-\varphi) = r_1(\varphi) \quad \text{--> đối xứng qua Ox.}$$

$$r_1(\pi - \varphi) = 2\cos(2\pi - 2\varphi) = 2\cos(2\varphi) = r_1(\varphi) \quad \text{--> đối xứng qua Oy.}$$

$$r_1\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2\cos(\pi - 2\varphi) = -2\cos(2\varphi) = -r_1(\varphi) \quad \text{--> đối xứng qua phân giác thứ 2.}$$

$$r_1\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -r_1(\pi - \varphi) \quad \text{--> đối xứng qua phân giác thứ 1.}$$

- Bảng biến thiên hàm $r_2 = 1 + \cos\varphi \Rightarrow r_2' = -\sin\varphi$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$r_2 = 1 + \cos\varphi$	2	1	0	1	2
$\operatorname{tg}V = \frac{r_2}{r_2'} \leftrightarrow V$	$\infty \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$	$-1 \leftrightarrow \frac{-\pi}{4}$	$0 \leftrightarrow 0$	$1 \leftrightarrow \frac{\pi}{4}$	$\infty \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$

Sinh viên tự kiểm chứng các góc V trên đồ thị H1.

$$r_2(-\varphi) = 1 + \cos(-\varphi) = 1 + \cos(\varphi) = r_2(\varphi) \quad \text{--> đối xứng qua Ox.}$$

- Bảng biến thiên hàm $r_3 = -\cos\varphi \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x = 0$

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r_3 = -\cos\varphi$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\operatorname{tg}V = \frac{r_3}{r_3'} \leftrightarrow V$	$\infty \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$	$-1 \leftrightarrow \frac{-\pi}{4}$	$0 \leftrightarrow 0$	$1 \leftrightarrow \frac{\pi}{4}$	$\infty \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$

thứ tự nhánh và chiều như H2. Sinh viên tự kiểm chứng các góc V. trên đồ thị H2.

$$r_3(-\varphi) = -\cos(-\varphi) = -\cos(\varphi) = r_3(\varphi) \quad \rightarrow \text{đối xứng qua Ox.}$$

- Bảng biến thiên hàm $r_4 = -\sin\varphi \Leftrightarrow x^2 + y^2 + y = 0$

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r_4 = -\sin\varphi$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\operatorname{tg}V = \frac{r_4}{r_4'} \leftrightarrow V$	$0 \leftrightarrow 0$	$-1 \leftrightarrow \frac{-\pi}{4}$	$-\infty \leftrightarrow \frac{-\pi}{2}$	$1 \leftrightarrow \frac{\pi}{4}$	$0 \leftrightarrow 0$

Sinh viên tự kiểm chứng các góc V trên đồ thị H2.

$$r_4(-\varphi) = -\sin(-\varphi) = \sin(\varphi) = -r_4(\varphi) \quad \rightarrow \text{đối xứng qua Oy.}$$

Ví dụ: Tìm: $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n$

Giải:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n &= 1 + n \frac{s}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left[\frac{s}{n}\right]^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left[\frac{s}{n}\right]^3 + \dots = \\ &= 1 + s + \frac{s^2}{2!} \left[1 - \frac{1}{n}\right] + \frac{s^3}{3!} \left[1 - \frac{1}{n}\right] \left[2 - \frac{1}{n}\right] + \frac{s^4}{4!} \left[1 - \frac{1}{n}\right] \left[1 - \frac{2}{n}\right] \left[1 - \frac{3}{n}\right] + \dots \end{aligned}$$

Cho n tiến về ∞ thì I tiến về: $= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} + \dots = e^s$

CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN

BÀI 1: NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1.1 Định nghĩa: Cho hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Hàm F được gọi là nguyên hàm của f trên D nếu:

$$F'(x) = f(x) \text{ với mọi } x \in D.$$

Ví dụ: • $F(x) = 4x^3$ là nguyên hàm của $f(x) = 12x^2$,

$$\text{vì } F'(x) = 12x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

• $F(x) = \frac{x^3}{3}, \frac{x^3}{3} - 5, \frac{x^3}{3} + C$ là các nguyên hàm của $f(x) = x^2$, vì

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{x^3}{3} - 5\right)' = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$$

1.2 Định lý: Nếu F là nguyên hàm của f trên D thì

$F + C$ cũng là nguyên hàm của f (với mọi $C \in \mathbb{R}$).

Chứng minh:

$$(F(x) + C)' = (F(x))' = f(x) \quad \blacksquare$$

1.3 Định nghĩa: Ta gọi tất cả các nguyên hàm của f là tích phân bất định của f và ký hiệu: $\int f(x) dx$.

Vậy nếu F là một nguyên hàm của f ta có:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

1.4 Các tính chất của tích phân bất định:

$$\text{i) } \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\text{ii) } \int kf(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, k = \text{const.}$$

Chứng minh có thể suy từ tính chất của đạo hàm.

1.5 Bảng tích phân cơ bản: Dựa vào kết quả đạo hàm của các hàm số ta có bảng sau: có thể kiểm chứng các công thức phức tạp bằng các phương pháp đã học lớp 12.

$$\int 1 dx = \int dx = x + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C = -\text{arccot}g x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int dx/\sin^2 x = -\cot x + C$$

$$\int dx/\cos^2 x = \tan x + C$$

$$\int \sec(x) dx = \ln|\sec(x) + \tan x| = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) + C$$

$$\int \sec^2(x) dx = \tan x + C, \quad \int \csc^2(x) dx = -\cot x + C$$

$$\int \csc(x) dx = \ln|\csc(x) - \cot x| = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh x + C$$

$$\int \sinh^2(x) dx = \frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{x}{2} + C$$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh x + C$$

$$\int \cosh^2(x) dx = \frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{x}{2} + C$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln x - x + C$$

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int e^{ax} \sin b x dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin b x - b \cos b x) + C$$

$$\int e^{ax} \cos b x dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos b x + b \sin b x) + C$$

$$\int e^{ax} x^2 dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) + C$$

$$\int e^{ax} x^3 dx = e^{ax} \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad x^2 > a^2$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C, \quad x^2 < a^2$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x-b}{x-a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C (*)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C (**),$$

$$\left(\text{do đặt } t = x + \sqrt{x^2 + b}, \quad dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}} \right) dx = \frac{tdx}{t-x} \right)$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Hai công thức này do tích phân từng phần và áp dụng (*) và (**), ta sẽ xét ở phần sau.

$$\int \tan hx dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \cot g hx dx = \ln(\sinh x) + C$$

$$\int \sec hx dx = \arctg(\sinh x) + C$$

Ví dụ 1:

$$\int (3 \sin x - 7x^2) dx = \int 3 \sin x dx - \int 7x^2 dx = -3 \cos x - 7/3 x^3 + C.$$

Ví dụ 2:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 7}{x^2 + 1} dx &= \int \left(x^2 - 5x - 2 + \frac{8x + 9}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 2x + 4 \int \left(\frac{2x dx}{x^2 + 1} \right) + 9 \int \left(\frac{dx}{x^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 2x + 4 \ln(x^2 + 1) + 9 \arctg x + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 3:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\tg x dx}{\cos^2 x} = \int \tg x \cdot d(\tg x) = \frac{\tg^2 x}{2} + C$$

Ví dụ 4:

$$\int \tg^2 x dx = \int (\tg^2 x + 1 - 1) dx = \tg x - x + C$$

Ví dụ 5:

$$\int \tg^5 x dx = \int (\tg^5 x + \tg^3 x - \tg^3 x + \tg x - \tg x) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \operatorname{tg}^3 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx - \int \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx + \int \operatorname{tg} x dx = \\
 &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C.
 \end{aligned}$$

1.6 Phương pháp đổi biến số trong tích phân bất định:

Nếu hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục và có hàm ngược là $t = \varphi^{-1}(x)$. Khi đó: $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$

Ví dụ 1: Tính $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

Đặt $x = at = \varphi(t) \Rightarrow dx = a dt$ và $t = x/a$.

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a dt}{a^2 t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Ví dụ 2: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$, đặt $t = \sqrt[6]{x}$

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)} = 6 \left[\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \right] = 6t - 6 \operatorname{arctg} t + C.$$

Ví dụ 3:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C$$

Do đặt $t = x + \sqrt{x^2 + b}$, $dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}\right) dx = \frac{tdx}{t-x}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \int \frac{(t-x) dt}{t(t-x)} = \ln |t| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C.$$

Ví dụ 4:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} = \int \frac{dx}{a \sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} = \operatorname{arcsin} \left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

1.7 Phương pháp tích phân từng phần:

Giả sử u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục, ta có:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ví dụ: Tính $\int x \operatorname{arctg} x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \arctg x \\ x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \int x \arctg x dx &= \frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C \end{aligned}$$

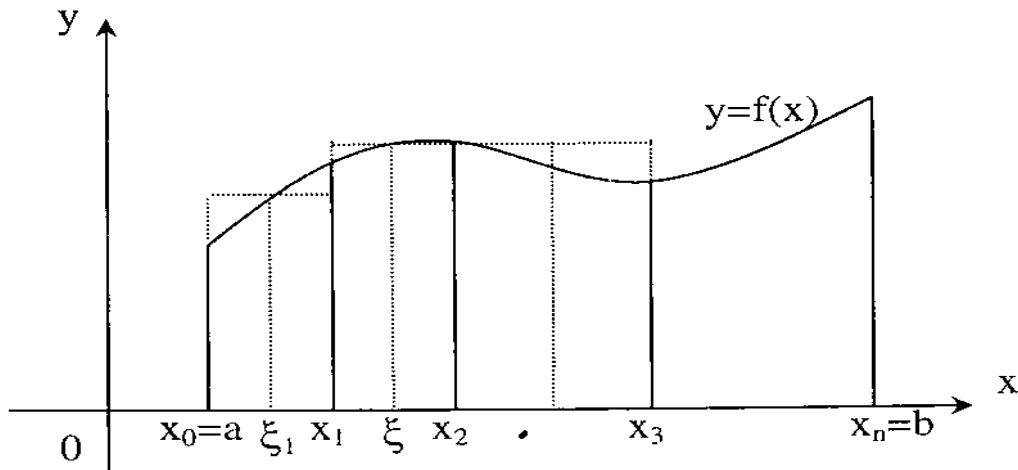
Phần kỹ thuật lấy tích phân, sinh viên đã quen các phương pháp lấy tích phân như phương pháp đổi biến, phương pháp tích phân từng phần ở lớp 12 trung học. Ở đây ta không bàn sâu các phương pháp, kỹ thuật lấy tích phân bất định.

BÀI 2: TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1 Bài toán tính diện tích hình thang cong:

Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$; $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$.

Hãy tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số f , đường thẳng $x = a$, $x = b$ và trục ox .



Một cách tự nhiên chúng ta sẽ giải bài toán này như sau: Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bởi các điểm chia:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$,

$i = 1, n$, ta chọn một điểm: ξ_i nào đó. Tính giá trị $f(\xi_i)$. Diện tích của hình chữ nhật là $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Tổng tất cả diện tích các hình chữ nhật này gần bằng diện tích của hình thang cong nếu n đủ lớn, ta ký hiệu

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Đặt $d = \max\{|\Delta x_i| \mid i = 1, 2, \dots, n\}$. Cho $d \rightarrow 0$; tức là phép chia vô cùng nhỏ, khi đó diện tích hình thang cong có thể coi bằng tổng diện tích của hình chữ nhật ở trên.

$$S = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

2.2 Định nghĩa: Cho hàm $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Xét tổng:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{d \rightarrow 0} S_n = S$ và giới hạn này không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$; không phụ thuộc vào cách chọn điểm ξ_i thì S được gọi là tích phân xác định của f trên đoạn $[a, b]$. Khi hàm f có tích phân xác định trên đoạn $[a, b]$, ta nói f khả tích trên $[a, b]$.

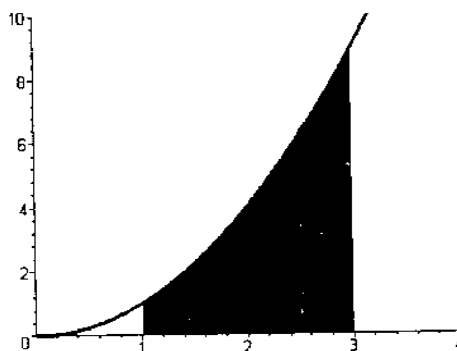
Kí hiệu:
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Ví dụ 1: Dùng định nghĩa tính $S = \int_1^3 x^2 dx$

Ta phân hoạch đoạn $[1, 3]$:

$$x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{2}{n}, \dots, x_i = 1 + i \frac{2}{n}, \dots$$

$$x_n = 1 + n \frac{2}{n} = 3,$$



$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + i \frac{2}{n}\right)^2 = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= \frac{2}{n} n + \frac{8}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Dùng định nghĩa tính $S = \int_0^a \sin x dx$

Ta phân hoạch đoạn $[0, a]$: $x_0 = 0, x_1 = 1 \frac{a}{n}, \dots, x_i = i \frac{a}{n},$

$$x_n = n \frac{a}{n} = a, \text{ đặt } h = \frac{a}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = h \sum_{i=0}^n f(x_i) = h \sum_{i=0}^n \sin ih$$

Nhân hai vế cho $2 \sin \frac{h}{2}$, ta có $2 \sin \frac{h}{2} S_n = \left(2 \sin \frac{h}{2} \right) h \sum_{i=0}^n \sin ih =$

$$= h \sum_{i=0}^n 2 \sin ih \sin \frac{h}{2} = h \sum_{i=0}^n \cos \left(\frac{1-i}{2} h \right) h - \cos \left(\frac{1+i}{2} h \right) h =$$

$$= h \sum_{i=0}^n \left[\cos \left\{ \left(\frac{1-i}{2} \right) h \right\} - \cos \left\{ \left(\frac{1+i}{2} \right) h \right\} \right] =$$

Đây là tổng có các số hạng liên tiếp triệt tiêu nhau, nên cuối cùng chỉ còn số hạng đầu trừ cho số hạng cuối. Vậy chúng bằng

$$= \dots = h \left[\cos \left(\frac{h}{2} \right) - \cos \left(\frac{h}{2} + a \right) \right]$$

Vậy $2 \sin \frac{h}{2} S_n = h \left[\cos \left(\frac{h}{2} \right) - \cos \left(\frac{h}{2} + a \right) \right]$, nên

$$S_n = \frac{\frac{h}{2} \left[\cos \left(\frac{h}{2} \right) - \cos \left(\frac{h}{2} + a \right) \right]}{\sin \frac{h}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos 0 - \cos(0 + a) = 1 - \cos a .$$

2.3 Ý nghĩa kinh tế của tích phân:

Ta gọi $I(t)$ là cường độ đầu tư tại thời điểm t . (Cường độ đầu tư là số tiền ta đầu tư trên một đơn vị thời gian xét tại thời điểm t). Tổng số tiền mà ta đầu tư tại thời điểm t_{i-1} đến thời điểm t_i có thể xấp xỉ bằng $I(\xi_i) \Delta t_i$. Trong đó $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Và $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Vậy tổng số tiền ta đầu tư từ thời điểm $a = t_0$ đến thời điểm $b = t_n$.

với $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Có thể tính xấp xỉ bằng:

$$\sum_{i=1}^n I(\xi_i) \cdot \Delta t_i$$

Để biết được gần chính xác số tiền đầu tư ta cho $d = \max |\Delta t_i|$ tiến đến 0. Vậy tổng số tiền đầu tư là .

$$K = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n I(\xi_i) \cdot \Delta t_i$$

Theo định nghĩa tích phân ta có : $K = \int_a^b I(t) dt$

2.4 Các tính chất của tích phân xác định.

Ta có các tính chất sau, phần chứng xem như bài tập.

i) Nếu $f(x)$ liên tục $[a, b]$ thì f khả tích trên $[a, b]$.

ii) Nếu $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$ và f có một số hữu hạn trên $[a, b]$ (gián đoạn loại 1, không có giới hạn vô cực) thì f khả tích trên $[a, b]$.

iii)
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

iv)
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

v)
$$\int_a^b m dx = (b - a)m, \quad m = \text{const}$$

Với f, g khả tích trên $[a, b]$ ta có:

vi)
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

vii) Nếu $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq b$ thì

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx$$

viii) Nếu $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

ix) Định lý giá trị trung bình:

Nếu $f(x)$ liên tục $[a, b]$ thì $\exists c \in [a, b]$ sao cho:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c).$$

Nhận xét: Có liên quan đến định lý Lagrange:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a)$$

x) Nếu $f(x)$ liên tục $[a, b]$ thì $\phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ khả vi trên $[a, b]$.

$$\text{Và } \phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

xi) Công thức Newton – Leibnitz (N-L)

Cho $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và F là một nguyên hàm của f khi đó:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

xii) Từ công thức (N-L.) ta mở rộng tính chất x) ở trên:

$$\begin{aligned} \left(\int_{h(x)}^{k(x)} f(t) dt \right)' &= \left(F(t) \Big|_{h(x)}^{k(x)} \right)' = [F(k(x)) - F(h(x))]'_x = \\ &= F'(k(x))k'(x) - F'(h(x))h'(x) = \\ &= f[k(x)]k'(x) - f[h(x)]h'(x). \end{aligned}$$

Tổng quát hơn:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} K(u,t) du \right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K(u,t)}{\partial t} du + K\{b(t),t\} \frac{db}{dt} - K\{a(t),t\} \frac{da}{dt}$$

Ví dụ 1: Tính $\left(\int_{x^2}^0 \sqrt{1+t^2} dt \right)' = - \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right)' = -2x\sqrt{1+x^4}$

Ví dụ 2: Tính $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \right)'_x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \sin \sqrt{x^2}}{3x^2}$$

Vậy $I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}$, tương tự $I = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x \sin x}{3x^2} = -\frac{2}{3}$

Từ hai phương pháp ở tích phân bất định ta cũng có hai phương pháp ở tích phân xác định đó là phương pháp đổi biến số và phương pháp tích phân từng phần.

2.5 Phương pháp đổi biến số.

Ta có hai định lý về phương pháp đổi biến số như sau:

Định lý 1: Hàm f liên tục trên $[a,b]$. Nếu $x=\varphi(t)$ thỏa:

i) Hàm $\varphi(t)$ khả vi, liên tục trên $[\alpha,\beta]$.

ii) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

iii) Khi t biến thiên trên $[\alpha,\beta]$ thì x biến thiên trên $[a,b]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

Định lý 2: Hàm f liên tục trên [a,b]. Nếu u=h(x) thỏa:

- i) Hàm h(x) khả vi, đơn điệu trên [a,b].
- ii) Khi x biến thiên trên [a,b] ta có f(x)dx biến thành g(u)du. Khi đó

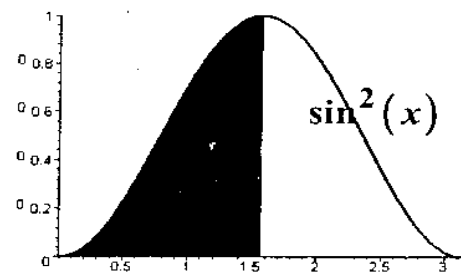
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} g(u) du = \int_{h(a)}^{h(b)} g(h(x)) h'(x) dx$$

2.4 Các ví dụ

Ví dụ 1: Tính $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ (H1)

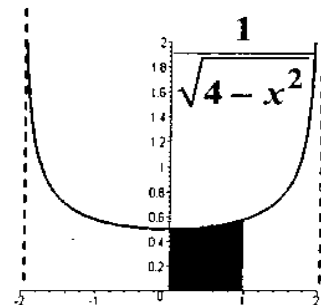
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} \right] = \frac{\pi}{4}$$



Ví dụ 2: Tính $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$,

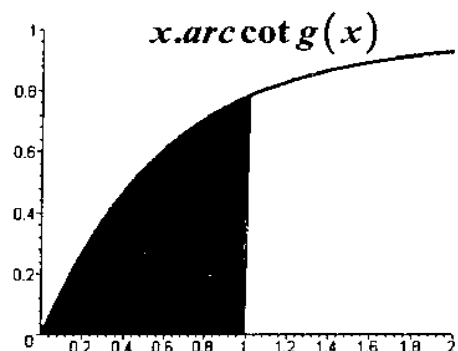
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = I$$



Đặt $x/2 = t \Rightarrow dx = 2dt$ $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = 1/2$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^1 x \cdot \operatorname{arccot} x dx$.



$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \operatorname{arccot}gx \\ xdx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-1}{1+x^2} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= uv \Big|_0^1 - \int_0^1 v du = \frac{x^2}{2} \operatorname{arccot}gx \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{8} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}x \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$, $0 < \alpha < \pi$.

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}$$

Đặt $u = (x - \cos \alpha) \Rightarrow du = dx$

$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow u = -1 - \cos \alpha; & x = 1 &\Rightarrow u = 1 - \cos \alpha \\ I &= \int_{(-1-\cos \alpha)}^{(1-\cos \alpha)} \frac{du}{u^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sin \alpha} \Big|_{(-1-\cos \alpha)}^{(1-\cos \alpha)} = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left[\operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} - \operatorname{arctg} \frac{-1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left[\operatorname{arctg} \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{arctg} \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left[\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{\pi}{2 \sin \alpha} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$

Xét hàm số $f(x) = 1/(1+x)$ trên $[0,1]$, hàm f có tích phân trên $[0,1]$. Chia đoạn $[0,1]$ ra n đoạn bởi các điểm chia:

$$0 < 1/n < 2/n < \dots < (n-1)/n < n/n = 1$$

Khi đó tổng S_n chính là tổng tích phân của f trên $[0,1]$ trong đó

$\zeta_i = i/n$; $\Delta x_i = 1/n$. Vậy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln 2.$$

Ví dụ 6: Giả sử một doanh nghiệp bỏ số vốn đầu tư vào sản xuất tuân theo quy luật $I(t) = t^3 - 3t^2 + 1$, biến t là thời điểm đầu tư, với $t \in [0, 100]$. Tính số vốn mà doanh nghiệp bỏ ra từ thời điểm $t=0$; đến $t=10$. Tổng số vốn là: $K = \int_0^{10} I(t) dt = \int_0^{10} (t^3 - 3t^2 + 1) dt = \frac{t^4}{4} - t^3 + t \Big|_0^{10} = 150$ (đvtt).

2.6 Phương pháp tích phân từng phần:

Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$ là hai hàm khả vi và có đạo hàm liên tục trên

[a,b]. Khi đó:
$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Ví dụ 7: Cho $g(x) = (x^2 - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh:

a/ Với mọi $k: 0 \leq k < n$ thì $g^{(k)}(1) = 0$ và $g^{(k)}(-1) = 0$

b/ Với $k = n$ thì $g^{(n)}(1) = 2^n n!$ và $g^{(n)}(-1) = 2^n n!(-1)^n$

c/ Với mọi $0 < k \leq n$, $\int_{-1}^1 g^{(k)}(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^n] dx = 0$

d/ Với mọi $m: 0 \leq m < n$, $\int_{-1}^1 x^m g^{(n)}(x) dx = \int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] dx = 0$

câu a, b đã chứng minh ở chương 2. Giờ ta chứng minh cho câu c, d.

c/ Với mọi $0 < k \leq n$, chú ý: $d[g^{(k)}(x)] = g^{(k+1)}(x) dx$

$$\int_{-1}^1 g^{(k)}(x) dx = \int_{-1}^1 d[g^{(k-1)}(x)] = g^{(k-1)}(x) \Big|_{-1}^1 = [(x^2 - 1)^n]^{(k-1)} \Big|_{-1}^1 =$$

$$= 0 - 0 \text{ (câu a, do } k-1 < n). \text{ Nhưng } \int_{-1}^1 g^{(0)}(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = \frac{-4}{3}$$

d/ Ta lập lại công thức tích phân từng phần liên tiếp để giảm bậc và chú ý kết quả câu a, đạo hàm tại 2 cận bằng 0, ... để cuối cùng bằng 0:

$$\int_{-1}^1 x^m g^{(n)}(x) dx = \int_{-1}^1 x^m d[g^{(n-1)}(x)] = \cancel{x^m g^{(n-1)}(x) \Big|_{-1}^1} +$$

$$+ \int_{-1}^1 \underbrace{mx^{m-1}}_{d[g^{(n-2)}(x)]} g^{(n-1)}(x) dx = 0 + \cancel{\emptyset} + \int_{-1}^1 m(m-1)x^{(m-2)} \underbrace{g^{(n-2)}(x)}_{d[g^{(n-3)}(x)]} dx \dots = 0$$

Chú ý: Câu d tổng quát hơn câu c, vì khi $m=0$, thì với $n>0=m$ ta có

$$\int_{-1}^1 g^{(n)}(x) dx = 0. \text{ Người ta gọi hàm } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] \text{ là}$$

đa thức **Legendre**, sẽ được gặp lại ở học phần: phương pháp tính.

Ví dụ 8: Đặt $H_i = (-1)^{n-i} \int_0^n \frac{(x)(x-1)\dots(x-n)}{(x-i)} dx.$

Sinh viên tự kiểm chứng: $H_i = H_{n-i} = (-1)^i \int_0^n \frac{(x)(x-1)\dots(x-n)}{(x-n+i)} dx.$

Ví dụ $n=4, H_1 = (-1)^{4-1} \int_0^4 x(x-2)(x-3)(x-4) dx = \frac{-128}{15}$

$$H_{4-1} = H_3 = (-1)^1 \int_0^4 x(x-1)(x-2)(x-4) dx = \frac{-128}{15}$$

Hay $n=5, H_2 = (-1)^{5-2} \int_0^4 x(x-1)(x-3)(x-4)(x-5) dx = \frac{-125}{12}$

$$H_{5-2} = H_3 = (-1)^2 \int_0^4 x(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) dx = \frac{125}{12}$$

2.7 Các ví dụ

• Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh công thức Walliss quan trọng sau đây, công thức này có rất nhiều ứng dụng trong kỹ thuật:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ lẻ} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & n \text{ chẵn} \end{cases}$$

ví dụ $7!!=7.5.3.1, \quad 8!!=8.6.4.2$

Dùng tích phân từng phần : $u = \sin^{n-1} x, \quad dv = \sin x dx$ ta có

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

$$\Rightarrow I_n = 0 + (n-1) \left[\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \right] = (n-1) [I_{n-2} - I_n]$$

$$\Rightarrow (n-1) I_{n-2} = I_n (n-1+1) \Leftrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot I_{n-4} = \dots$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{(n-1)(n-3)\dots}{n(n-2)\dots} = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ le} \\ \frac{(n-1)!! \pi}{n!! \cdot 2} & n \text{ chan} \end{cases}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1; I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2}$$

• Dùng công thức Walliss và đổi biến ta thu được các kết quả tương tự như sau :

$$\int_0^{\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 2 * \text{Waliss}, n \text{ chan} \\ 0, n \text{ le} \end{cases}, \quad \int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2 * \text{Waliss}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 4 * \text{Waliss}, n \text{ chan} \\ 0, n \text{ le} \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \begin{cases} 0 & n \text{ le} \\ 4 * \text{Waliss}, n \text{ chan} \end{cases}$$

$$\int_0^{4\pi} \sin^n x dx = \int_0^{4\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 8 * \text{Waliss}, n \text{ chan} \\ 0, n \text{ le} \end{cases}$$

Ví dụ 1 :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx = \frac{4.2}{5.3.1} \quad ; \quad \int_0^{\pi} \sin^5 x dx = 2 \text{waliss} = 2 \cdot \frac{4.2}{5.3.1}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^5 x dx = 0 \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \sin^6 x dx = 4 \cdot \frac{5.3.1.\pi}{6.4.2.2} = \frac{5\pi}{8};$$

$$\int_0^{4\pi} \sin^6 x dx = 8 \frac{5!! \pi}{6!! \cdot 2} = 8 \frac{5 \times 3 \times 1 \pi}{6 \times 4 \times 2 \cdot 2}$$

Tương tự ta có thể chứng minh công thức Wallis thứ 2 (Wallis') như sau:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(n+m)!! \rightarrow (m+1)}, n \text{ le} > 1 \\ \frac{(m-1)!!}{(n+m)!! \rightarrow (n+1)}, m \text{ le} > 1 \\ \frac{(n-1)!! \times (m-1)!!}{(n+m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, n, m \text{ chan} > 0 \end{cases},$$

công thức này cũng theo qui luật trên, nghĩa là nếu thay $\frac{\pi}{2}$ bằng $\pi, 2\pi$ hay 4π thì kết quả sẽ là $2 \times \text{Wallis}'$, $4 \times \text{Wallis}'$, $8 \times \text{Wallis}'$.

$$\text{Ví dụ 2: } \int_0^{\pi} \cos^6 x dx \stackrel{\square}{=} \int_{x=\frac{\pi}{2}-y}^{y=\frac{\pi}{2}} \sin^6 y (-dy) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 y dy = 2 \times \text{Wallis}$$

$$\text{Ví dụ 3: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos^6 x dx = 2 \frac{(3!!)(5!!)}{(4+6)!!} \frac{\pi}{2} = 2 \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{256},$$

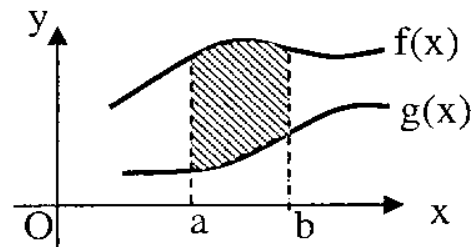
$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \cos^7 x dx = \frac{(7-1)!!}{(5+7)!! \rightarrow (5+1)} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot (5+1)} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{1}{120} = \frac{(5-1)!!}{(5+7)!! \rightarrow (7+1)} = \frac{4 \times 2}{12 \times 10 \times 8} = \frac{1}{120}$$

BÀI 3: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.1 Diện tích hình thang cong

Cho hai hàm $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$, diện tích hình thang cong giới hạn bởi $f(x)$, $g(x)$, $x=a$, $x=b$ là tích phân được xác định

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



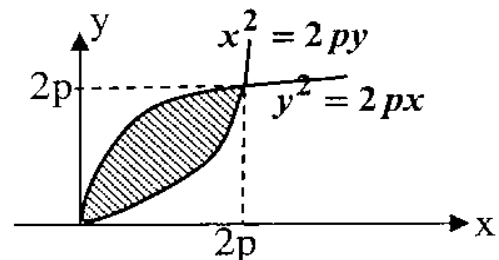
Nếu f và g được cho bởi phương trình tham số, $x(t=n)=a$, $x(t=m)=b$:

$$f: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad g: \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad t \in [n, m], \text{ thì}$$

$$S = \int_n^m |y(t) \cdot x'(t) - v(t) u'(t)| dt$$

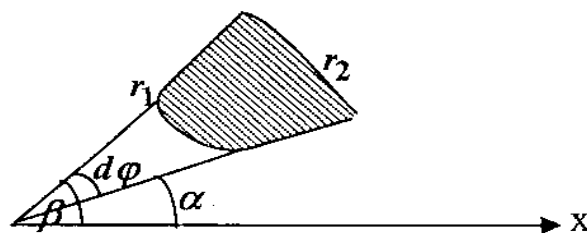
Ví dụ. Tính diện tích giới hạn bởi các đường $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$, $p > 0$.

$$S = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \frac{4p^2}{3} \text{ đvdt}$$



3.2 Diện tích hình quạt cong

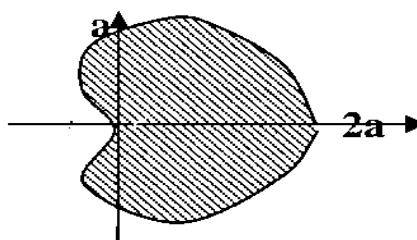
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)] d\varphi$$



Diện tích giới hạn bởi 2 phương trình $r_2(\varphi)$ và $r_1(\varphi)$ trong tọa độ cực, do cách tính tam suất, diện tích hình quạt chắn góc φ trong một vòng tròn.

Ví dụ: Tính diện tích giới hạn bởi đường cardioid $r = a(1 + \cos \varphi)$, hình này đối xứng qua trục cực.

$$S = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\varphi \right) = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2 \text{ (đvdt).}$$



3.3 Độ dài cung :

- Nếu cung AB có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$, độ dài cung

AB được tính:
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

- Nếu cung AB có phương trình thông thường $y=f(x)$, $x \in [a, b]$, thì độ dài

cung AB :
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- Nếu cung AB có phương trình tọa độ cực $r=r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, thì độ dài

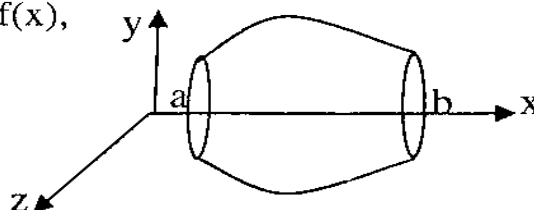
cung AB:
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + [r'(\varphi)]^2} d\varphi$$

Do $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ y' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2$

3.4 Thể tích tròn xoay :

Thể tích vật thể giới hạn bởi đường $y=f(x)$, trục Ox, $x=a$, $x=b$, xoay quanh Ox cho bởi công thức

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



3.5 Diện tích mặt tròn xoay :

- Nếu cung AB có phương trình tham số .

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta], y(t) \geq 0 \text{ trên } [\alpha, \beta], \text{ khi đó diện tích mặt tròn xoay}$$

cho bởi các công thức: (các công thức này dễ kiểm chứng nhờ các công thức độ dài vi phân cung ở trên).

$$1/ \text{ Xoay quanh trục Ox : } S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$2/ \text{ Xoay quanh trục Oy : } S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

- Nếu cung AB có phương trình $y=f(x)$, $x \in [a, b]$, xoay quanh trục Ox, thì:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

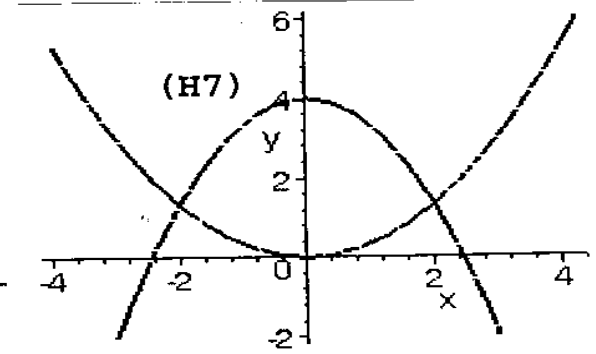
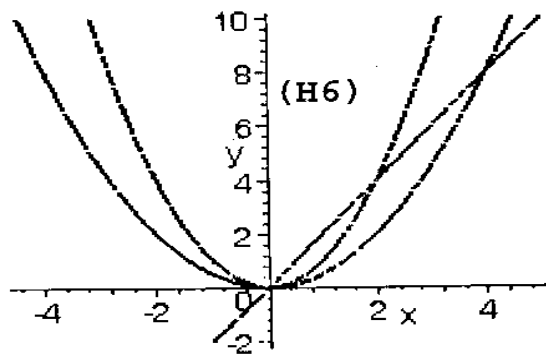
3.6 Các ví dụ:

Ví dụ 1: Diện tích giới hạn bởi đường cong $y=x^2$, $y=x^2/2$, $y=2x$

Giải:

giao điểm $(0,0)$, $(2,4)$, $(4,8)$ (H6)

$$\begin{aligned} S &= \int_{x=0}^{x=4} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) dx - \int_{x=0}^{x=2} \left(2x - x^2 \right) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{x=0}^{x=4} - \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$



Ví dụ 2: Diện tích giới hạn bởi đường cong $y=x^2/3$, $y=4-2x^2/3$

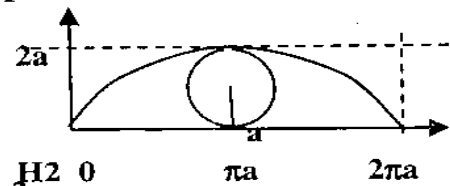
Giải:

Giao điểm $(-2, 4/3)$, $(2, 4/3)$, (H7)

$$S = \int_{x=-2}^{x=2} \left(\left(4 - \frac{2x^2}{3} \right) - \frac{x^2}{3} \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left(4 - x^2 \right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-2}^{x=2} = \frac{32}{3}$$

Ví dụ 3: Diện tích giới hạn bởi cung cycloid

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad t = \overline{0, 2\pi}$$



Giải:

$$\begin{aligned} S &= \int_{t=n}^{t=m} (yx'_t - vu'_t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} (yx'_t - 0) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 2(1 - \cos t) \cdot 2(1 - \cos t) dt = \\ &= 4 \int_{t=0}^{t=2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 4 \left(2\pi + 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 12\pi. \end{aligned}$$

Trong khi diện tích hình chữ nhật bao R=a=2 là $\cdot 2\pi \cdot 2 = 16\pi$.

Ví dụ 4: Tính độ dài giới hạn bởi cung cycloid ở trên.

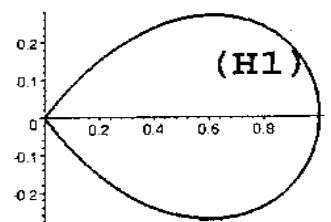
Giải:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4[1 - \cos t]^2 + 4\sin^2 t} dt = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 16. \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tính độ dài giới hạn bởi cung astroide: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Giải:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}, \text{ vậy } \frac{L}{4} = \int_0^a \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}} dx = \\ &= \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{3a}{2} \Rightarrow L = 6a \end{aligned}$$



Ví dụ 6: Tính diện tích giới hạn bởi cung (H1)

$$r = a \cos 2\varphi, \quad a > 0, \quad -\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$$

Giải:

$$\text{Đặt } 2\varphi = u \Rightarrow 2d\varphi = du$$

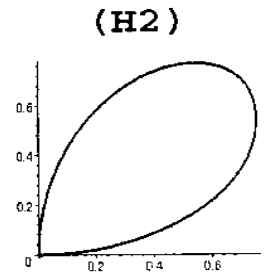
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\varphi=-\pi/4}^{\varphi=\pi/4} (r^2) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} (r^2) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{u=0}^{u=\pi/2} [(a \cos u)^2] du = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_{u=0}^{u=\pi/2} [(\cos u)^2] du = \frac{a^2}{8} \pi \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Tính diện tích giới hạn bởi cung (H2)

$$r = a \sin 2\varphi, \quad a > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{đặt } 2\varphi = u, \quad S &= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} (r^2) d\varphi = \frac{1}{4} \int_{u=0}^{u=\pi} [(a \sin u)^2] du = \\ &= \frac{a^2}{4} \int_{u=0}^{u=\pi} [(\sin u)^2] du = \frac{a^2}{8} \pi \end{aligned}$$



Ví dụ 8: Tính thể tích hình xuyến tạo bởi sự quay của hình tròn $x^2 + (y-b)^2 = a^2, b > 0$, quay quanh trục x.

Giải:

$$\begin{aligned} y_1 &= b - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2} \\ V &= \pi \int_{-a}^a \left[(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right] dx = \\ V &= 4b\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Thể tích tròn xoay của Astroide .

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ quanh Ox.}$$

Giải:

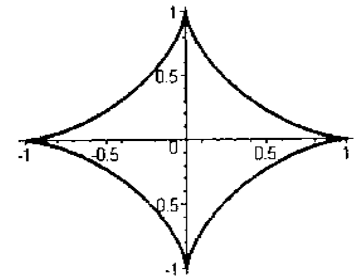
Cách 1. Vì hình là đối xứng qua ox, oy nên thể tích quay quanh cả hai là như nhau.

Vì đối xứng qua oy:

$$\begin{aligned} V &= 2 \times \pi \int_0^a x^2 dy = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^3 t)^2 d(a \sin^3 t) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^3 t)^2 (3a \sin^2 t \cos t dt) = \\ &= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t \cdot \sin^2 t dt = 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7 t - \cos^9 t) dt = 6\pi a^3 \left(\frac{6.4.2}{7.5.3} - \frac{8.6.4.2}{9.7.5.3} \right) = \\ &= \frac{32\pi a^3}{105} \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\text{Có thể tính } V = 2\pi \int_{x=0}^{x=a} y^2(x) dx = 2\pi \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} (a \sin^3 t)^2 d(a \cos^3 t) =$$

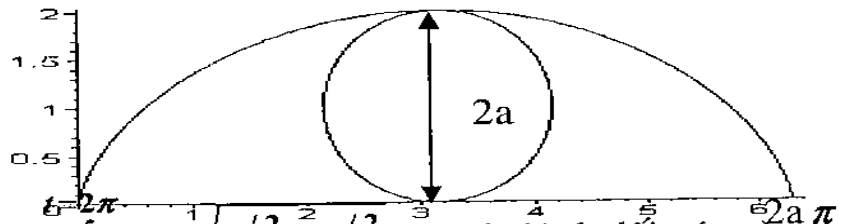


$$= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \sin^7 t dt = \frac{32\pi a^3}{105}$$

Cách 3: $V = 2\pi \int_{x=0}^{x=a} y^2(x) dx = 2\pi \int_{x=0}^{x=a} \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^3 dx = \frac{32\pi a^3}{105}$

Ví dụ 10: Tính diện tích tròn xoay do cycloide quay quanh trục Ox, Oy.

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad t = \overline{0, 2\pi}$$



Giải:

+ Khi quay trục Ox: $S = 2\pi \int_{t=0}^{t=\pi} y(t) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = (\text{do hình đối xứng}) \int_{t=0}^{t=\pi} y(t) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$

$$= 4\pi \int_{t=0}^{t=\pi} a(1 - \cos t) a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt =$$

$$= 4\pi \int_{t=0}^{t=\pi} a^2(1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt =$$

$$= 4\pi \int_{t=0}^{t=\pi} a^2(1 - \cos t) \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 8\pi \int_{t=0}^{t=\pi} a^2(1 - \cos t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= 16\pi a^2 \int_{t=0}^{t=\pi} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt = 16\pi a^2 \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^3 u (2du) = 32\pi a^2 \frac{2}{3} = \frac{64\pi a^2}{3}$$

+ Khi quay trục Oy: sinh viên tự làm ĐS $S = 16\pi^2 a^2$.

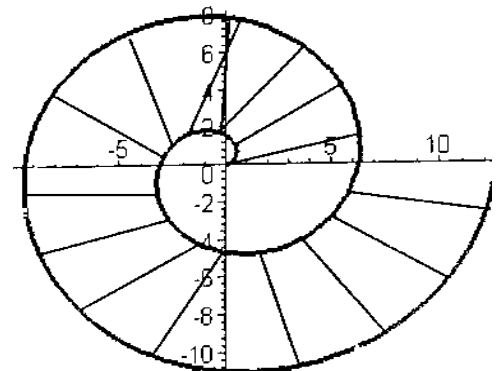
Ví dụ 11: Tính diện tích gạch chéo như hình sau, mà đồ thị được biểu diễn trong tọa độ cực $r = a\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$.

Giải:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} [a^2(\theta + 2\pi)^2 - a^2(\theta)^2] d\theta =$$

$$= 8a^2\pi^3$$



Ví dụ 12: Tính diện tích tròn xoay của đồ thị $r = e^{\theta/2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ khi xoay quanh trục OX.

• Nếu cung AB có phương trình $r=r(\theta)$, $\theta \in [a, b]$, xoay quanh trục Ox,

$$\text{thì: } S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx =$$

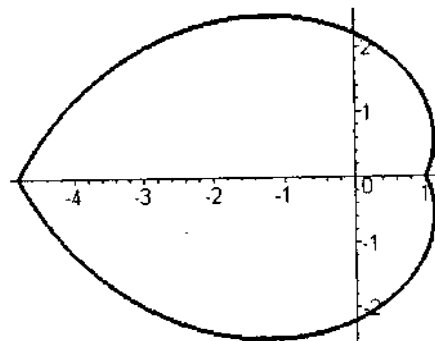
$$= 2\pi \int_{\theta=a}^{\theta=b} y ds = 2\pi \int_{\theta=a}^{\theta=b} r \sin \theta ds .$$

$$ds = \sqrt{\left(e^{\theta/2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e^{\theta/2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}\left(e^{\theta/2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{\theta/2} . \text{ Vậy}$$

$$S = 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r \sin \theta ds = 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} e^{\theta/2} \sin \theta \left(\frac{\sqrt{5}}{2}e^{\theta/2}\right) d\theta =$$

$$= \sqrt{5}\pi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} e^{\theta} \sin \theta d\theta = \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \left(e^{\theta} [\sin \theta - \cos \theta] \right)_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{\sqrt{5}\pi}{2} (e^{\pi} - 1)$$



BÀI TẬP

1/ Cho f tuần hoàn với chu kỳ T Chứng minh:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

Ap dụng: Tính $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$

2/ Tính giới hạn

a/ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

b/ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$

3/ Tính đạo hàm của hàm số: $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

4/ Tính các tích phân sau đây:

a/ $\int_{-2}^{+2} [|x+1| - |x-1|] dx$ b/ $\int_{-1}^2 \max(1, x^2) dx$

c/ $\int_0^4 \min(x^2, 5x-4) dx$ d/ $\int_0^4 |x^2 - 7x + 6| dx$

5/ Chứng minh các tích phân sau đây:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx, \text{ f liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Áp dụng tính $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{9 + 4\cos^2 x}$

6/ Với hàm $f(x)$ là chẵn, chứng minh tích phân sau đây:

$$I = \int_{-b}^b \frac{f(x) dx}{a^x + 1} = \int_0^b f(x) dx$$

7/ Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi các đường sau đây:

a/ $y = -2x^2 + 3x + 6; \quad y = x + 2.$

b/ $r = a \cos 3\theta.$

c/ $y = 2^x; \quad y = 2, \quad x = 0.$

d/ $y = 2t - t^2; \quad y = 2t^2 - t^3$

e/ $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

8/ Tính thể tích do các hình có phương trình sau đây :

a/ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, xoay quanh trục Ox.

b/ $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, xoay quanh trục Ox, $b > a > 0$

c/ $y = 2x - x^2; \quad y = 0$, xoay quanh trục Ox, Oy.

9/ Tính độ dài cung có phương trình sau đây

a/ $\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{a^3}$ (astroide).

b/ $r = a(1 + \cos \theta)$ (cycloide)

c/ $x^2 + y^2 = r^2$

10/ Tính diện tích các mặt có phương trình sau đây:

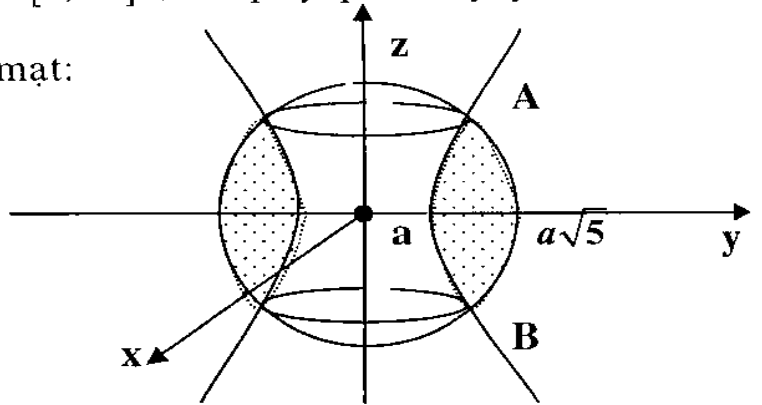
a/ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, khi quay quanh Ox, Oy.

$$b/ \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi], \text{ khi quay quanh Oy, } y=2a.$$

11/ Tính thể tích giao bởi 2 mặt:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 5a^2$$

$$\text{và } x^2 + y^2 - z^2 \leq a^2$$



12/ Cho $f(t) = \begin{cases} -t, t < 0 \\ t, t \geq 0 \end{cases}$, tìm hàm $s(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$, tính $\int_{x=-2}^{x=2} s(x) dx$

tìm hàm $g(u) = \int_{x=0}^{x=u} s(x) dx$, ĐS $g(u) = \begin{cases} 2u - \frac{u^3}{6}, u < 0 \\ 2u + \frac{u^3}{6}, u > 0 \end{cases}$

BÀI 4: TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Trong phần này ta xét:

- Tích phân trên một khoảng vô hạn.
- Tích phân trên $[a, b]$ và hàm có điểm gián đoạn trên $[a, b]$.

4.1 Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên $[a, +\infty)$, khả tích trên mọi

đoạn $[a, b]$, với $b > a$. Ta định nghĩa: $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$.

- Nếu giới hạn bên phải là hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ hội tụ (HT). Ngược lại ta nói tích phân này phân kỳ (PK).}$$

- Tương tự như vậy nếu f xác định trên $(-\infty, b]$ và khả tích với mọi $[a, b]$, $-\infty < a < b$,

ta cũng định nghĩa $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$

- Nếu f xác định trên $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Khi đó định nghĩa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$

Tích phân ở vế trái hội tụ nếu cả hai tích phân ở vế phải hội tụ

Ví dụ 1: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [1 - e^{-b}] = 1$$

Vậy tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ hội tụ và $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctg x]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctg x]_0^b = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} HT, \alpha > 1 \\ PK, \alpha \leq 1 \end{cases}$

$$\text{Thật vậy: } \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) \quad (\alpha \neq 1)$$

Nếu $1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$ Khi đó $b \rightarrow +\infty$ thì $b^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$ từ đó tích phân phân kỳ. Ngược lại $\alpha > 1$ ta có tích phân hội tụ.

$$\text{Còn nếu } \alpha = 1, \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln b] = +\infty$$

Tích phân phân kỳ.

4.2 Định lý: Cho $\boxed{0 \leq f(x) \leq g(x)}$, $\forall x \in [a, +\infty)$ và $\int_a^{+\infty} g(x) dx$

hội tụ. Khi đó: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

$$\text{Do } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$\int_0^1 e^{-x^2} dx$ là tích phân xác định, hàm dưới dấu tích phân liên tục nên
 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ hữu hạn.

$$\forall x \geq 1, \quad x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}, \quad 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

Đã biết: $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ hội tụ.

Từ đó tích phân đã cho hội tụ.

4.3 Định lý: Cho f, g liên tục và luôn dương $\boxed{(f > 0, g > 0)}$, trên $[a, +\infty)$.

Giả sử: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$

1. Nếu $0 < K < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x) dx$; $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ có cùng tính chất hội

tụ hoặc phân kỳ.

2. Nếu $K = 0$

Từ $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ hội tụ thì suy ra $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ. Hay

Từ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ PK thì suy ra $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ PK.

3. Nếu $K = +\infty$

Từ $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ phân kỳ thì suy ra $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ phân kỳ. Hay

Từ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ HT thì suy ra $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ HT.

Chứng minh:

1. Nếu $0 < K < +\infty$,

$$2. \quad \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0: x > M \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f}{g} < K + \varepsilon$$

Lấy $\varepsilon = \frac{K}{2}$ thì $0 < \frac{K}{2} g < f < \frac{3K}{2} g$, nhờ định lý 4.2, ta suy ra đpcm.

Lý luận tương tự như vậy cho $k=0$ và $k = +\infty$. ■

Ví dụ 1: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^3}$

Xét $g(x) = \frac{1}{x^3} > 0$ trên $[1, +\infty)$, $f(x) > 0$ là hàm dưới dấu tích phân. Ta có

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_0^1 f(x)dx \text{ hữu hạn.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1+x^2+x^3} = 1$$

mà $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Từ đó $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Ví dụ 2:
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin x + 1}$$

Chú ý hàm dưới dấu tích phân dương với mọi x không âm.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin x + 1} = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ hữu hạn, xét $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ mà } \int_1^{+\infty} g(x)dx \text{ phân kỳ} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ phân kỳ}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ phân kỳ.}$$

Ví dụ 3: $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$ hội tụ, $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2} > 0$. Xét hàm $g(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0 = k,$$

mà $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ nên tích phân của $f(x)$ đã cho cũng hội tụ.

Ví dụ 4: $\int_1^{\infty} \frac{1 + \cos^2 x}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} dx$, $f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} > 0$, $g(x) = \frac{1}{x} > 0$

Ta có $x^2 + 2x - 1 > 0, \forall x \in (1, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos^2 x}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} \rightarrow 1 = k,$$

mà $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ PK, nên tích phân của $f(x)$ đã cho cũng PK.

Ví dụ 5: $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e x \sqrt{\ln^{\alpha-2} x}}$ hội tụ khi nào ?

Đặt $u = \ln(x) \implies I = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{\frac{\alpha-2}{2}}}$ HT $\iff \frac{\alpha-2}{2} > 1 \iff \alpha > 4$

4.4 Định lý: Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Chú ý: Điều ngược lại không đúng.

Ví dụ: $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$

Xét hàm $f(x) = e^{-x} \sin x$ ta có: $|f(x)| = |e^{-x} \sin x| \leq e^{-x} = g(x)$

hai hàm $|f(x)|$; $g(x)$ đều dương trên $[0, +\infty)$ và $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ nên

$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ từ đó $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

4.5 Định nghĩa: Cho f xác định trên $[a, b)$ khả tích trên mọi đoạn $[a, b']$; $b' < b$; $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$. Khi đó định nghĩa tích phân suy rộng

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{b' \rightarrow b^-} \int_a^{b'} f(x)dx.$$

Tương tự ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = \lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x)dx$ cho hàm f xác định

trên $(a, b]$ khả tích trên mọi đoạn $[a', b]$; $a > a'$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$.

Nếu $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, khả tích trên mọi đoạn $[a', b']$; $a < a' < b' < b$

Ta định nghĩa: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $a < c < b$

Ví dụ 1: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \rightarrow 1} \arcsin x \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow 1} \arcsin b = \frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$

Với $c < b$:

$$\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \int_a^c (b-x)^{-\alpha} dx = \frac{-1}{1-\alpha} (b-x)^{1-\alpha} \Big|_a^c =$$

$$= \frac{-1}{1-\alpha} \left[(b-c)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha} \right]$$

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{-1}{\alpha-1} \lim_{c \rightarrow b^-} \left[(b-c)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha} \right]$$

- Nếu $1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{-1}{\alpha-1} (b-a)^{1-\alpha}$$

- Nếu $1-\alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$, Giới hạn trên không tồn tại.

Vậy $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$ và phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.

Tương tự như hai định lý phân tích phân có cận vô cùng ta cũng có:

4.6 Định lý: Cho $\boxed{0 \leq f(x) \leq g(x)} \quad \forall x \in [a, b)$

và $\int_a^b g(x) dx$ hội tụ khi đó $\int_a^b f(x) dx$ hội tụ.

4.7 Định lý: Cho $\boxed{0 < f(x), 0 < g(x)} \quad \forall x \in [a, b), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

1. $0 < k < +\infty$: $\int_a^b f(x) dx$; $\int_a^b g(x) dx$ có cùng tính chất.

2. $k = 0$: Nếu $\int_a^b g(x) dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x) dx$ hội tụ. Hay

Nếu $\int_a^b f(x) dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x) dx$ phân kỳ.

3. $k = +\infty$: Nếu $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ. Hay

Nếu $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ.

Chứng minh tương tự như định lý có cận vô cực.

Tóm lại: $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} HT & \alpha > 1 \\ PK & \alpha \leq 1 \end{cases}$ và $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} HT & \alpha < 1 \\ PK & \alpha \geq 1 \end{cases}$

Ví dụ 1: Xét sự hội tụ của tích phân: $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \geq 0; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 g(x)dx \text{ hội tụ.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{Suy ra: } \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx \text{ hội tụ.}$$

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của tích phân: $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. hội tụ.

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, chọn $f(x)=1$ chẳng hạn. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

Mạnh hơn nữa, trong giải tích Fourier ta có: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 3: $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1} dx$ hội tụ. Xét hàm $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{e^u - 1} = 1$ mà $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ

nên tích phân đã cho hội tụ.

Cách khác: Ở đâu ra hàm $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$?. Do ta dựa vào khai triển Taylor:

$$e^{\sqrt[3]{x}} - 1 = \frac{x^{1/3}}{1} + \frac{x^{2/3}}{2!} + \frac{x^{3/3}}{3!} + \dots + \dots > x^{1/3}.$$

Nên $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1} dx < \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ (HT).

Ví dụ 4: $\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$, $f(x) = \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}$ Xét hàm $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2-x}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5}{\sqrt{2+x}} = \frac{32}{2} = 16$ (hữu hạn)

mà $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \int_0^2 \frac{1}{u^{1/2}} du$ có $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ nên hội tụ.

Nên tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ 5: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \pi$.

Ta có: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

Hai tích phân suy rộng sau là hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ. Thật vậy:

$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 = k$ (hữu hạn)

mà $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ HT, nên $I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ HT.

$I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 = k$ (hữu hạn)

mà $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ HT, nên $I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ HT

Chú ý: Trong cả 2 dạng $I = \int_0^a \frac{g(x)}{x^\alpha} dx$ và $J = \int_a^\infty \frac{g(x)}{x^\alpha} dx$ nếu $g(x)$ xác định, liên tục trên $[0, a]$ hay $[a, \infty]$ và $g(x)$ bị chặn, thì lúc đó ta chỉ xét sự HT hay PK của I và J dưới dạng: $I = \int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$ và $J = \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$

Ví dụ 6: $I = \int_0^1 \frac{x^{3\beta}}{\sqrt[3]{12x - x^3}} dx$ hội tụ nếu và chỉ nếu $\beta > \frac{-2}{9}$

Vì mẫu $\sqrt[3]{12x - x^3} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{12 - x^2}$, biểu thức $\sqrt[3]{12 - x^2}$ hoàn toàn xác định, vậy ta chỉ cần xét $\int_0^1 \frac{x^{3\beta}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\left(\frac{1}{3} - 3\beta\right)}} dx$, $\frac{1}{3} - 3\beta < 1 \Leftrightarrow \beta > \frac{-2}{9}$

Ví dụ 7: $I = \int_0^1 \frac{x^\beta - 1}{\sqrt{(x^2 + 1)} \sin x} dx$ hội tụ nếu và chỉ nếu $\beta > \frac{-1}{2}$

Thành phần hai: $\frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)} \sin x}$ chỉ xét $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \approx \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, nên HT vì $\alpha = \frac{1}{2}$

Còn thành phần nhất: $\frac{x^\beta}{\sqrt{(x^2 + 1)} \sin x}$ chỉ xét $\frac{x^\beta}{\sqrt{\sin x}} \approx \frac{1}{x^{\left(\frac{1}{2} - \beta\right)}}$,

vậy để HT ta phải có: $\frac{1}{2} - \beta < 1 \Leftrightarrow \beta > \frac{-1}{2}$

Ví dụ 8: $I = \int_0^1 \frac{x^\beta - 1}{\sqrt{x^3} \sin x} dx$ thì luôn PK do thành phần thứ hai PK

Ví dụ 9: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx$ Không xác định tại cận 0.

Lấy tích phân từng phần, ta có:

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx = x \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) \Big|_{x=\varepsilon}^{x=\frac{\pi}{3}} + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\pi}{3} x \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx$$

$$= \varepsilon \ln \left(2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right) + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx, \text{ ta dùng Lopital để chứng minh:}$$

$$x \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) = \frac{\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow 0, \text{ còn tích phân cuối sẽ tiến tới}$$

$$\text{tích phân: } \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx \text{ HT,}$$

$$\text{vì đặt } g(x) = \cos \frac{x}{2}, f(x) = \frac{x \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx : \text{HT}$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}} \rightarrow 1$$

4.8 Định lý: Nếu $\int_a^b |f(x)| dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x) dx$ cũng hội tụ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx = \sqrt{2\pi} \approx 2.5066$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx. \text{ Dễ thấy } \int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx \text{ hội tụ,}$$

$$\text{do } f(x) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ HT, } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$$

Xét tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$

Ta có: $\left| \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ hội tụ, nên $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \right| dx$ hội tụ

Suy ra: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ hội tụ. Từ đây suy ra tích phân đã cho hội tụ.

4.9 Hàm GAMMA:

Định lý Hàm gamma: $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$, $a > 0$. Có tính chất:

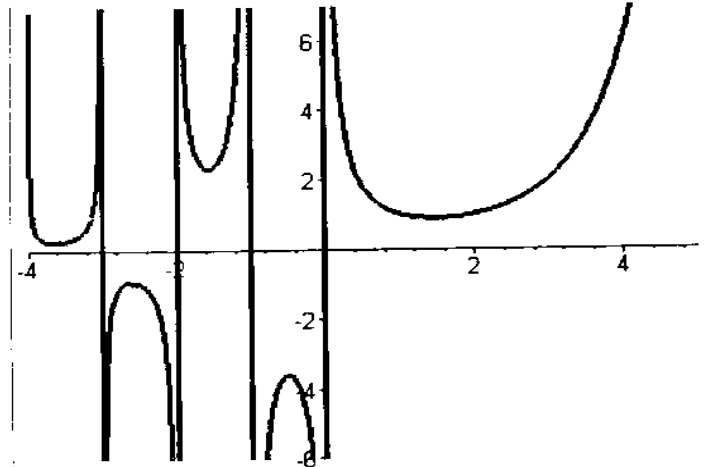
a/ Hàm gamma là xác định.

b/ $\Gamma(1) = 1$

c/ $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$, $a > 0 \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$

d/ $\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Chứng minh:



Đồ thị hàm gamma

a/ Ta nhớ lại: x ở vô cực ($x > 1$) , $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} HT & \alpha > 1 \\ PK & \alpha \leq 1 \end{cases}$

x ở zero ($0 < x < 1$) , $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} HT & \alpha < 1 \\ PK & \alpha \geq 1 \end{cases}$

Ta chia ra 2 cận tương ứng với 2 hàm không xác định tại các cận đó

Tại cận 0: $\int_0^{\infty} x^{(a-1)} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{(1-a)}} dx$,

Hội tụ nếu $1-a < 1 \Rightarrow a > 0$ (hiển nhiên).

Tại cận ∞ : $\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$: Hội tụ vì $x^{a-1} e^{-x} = \frac{x^{a-1}}{e^x} \rightarrow 0$

Khi x tiến đến vô cực. ■

b/ $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$

c/ $\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} \underbrace{x^a}_u \underbrace{e^{-x}}_{dv} dx = -x^a e^{-x} \Big|_0^{\infty} + a \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = 0 + a\Gamma(a) = a\Gamma(a)$

d/ Ta chấp nhận, khi $a = \frac{1}{2}$ thì suy ra $\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ■

Ví dụ: Dựa vào $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), n \in \mathbb{Z}$, Tính:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right), \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right), \Gamma(0), \Gamma(-1), \Gamma(-2)$$

Trường hợp tổng quát: nếu n là số nguyên dương hay bằng 0 thì:

$$\Gamma\left(-n - \frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right) \dots \left(\frac{2}{2n+1}\right) \sqrt{\pi}$$

Giải:

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

$$-2\sqrt{\pi} = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{\pi} = \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2}\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

$$1 = \Gamma(1) = 0 \cdot \Gamma(0) \Rightarrow \boxed{\Gamma(0) = \frac{1}{0} = \infty}$$

$$\infty = \Gamma(0) = -1 \cdot \Gamma(-1) \Rightarrow \boxed{\Gamma(-1) = -\infty}$$

$$-\infty = \Gamma(-1) = -2 \cdot \Gamma(-2) \Rightarrow \Gamma(-2) = \infty \dots \dots \Rightarrow \boxed{\Gamma(-n) = \infty}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \dots (1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$$

Ta đã biết: $\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(z\pi)}}$

đặt $z = n + \frac{3}{2} \Rightarrow 1 - z = -n - \frac{1}{2}$, vậy có:

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-n - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\pi} = \frac{\pi}{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} + \pi\right]} =$$

$$= \frac{-\pi}{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]} = \frac{-\pi}{(-1)^n} = (-1)^{n+1} \pi$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(-n - \frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1} \pi \frac{2^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \dots (1) \sqrt{\pi}} =$$

$$\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1} \pi \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{2}{5} \cdots \frac{2}{2n+1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}}{(2n+1)!!} \sqrt{\pi}$$

4.10 Hàm Beta:**Định lý** Hàm beta, $a > 0, b > 0$.

$$Be(a, b) = \int_0^1 x^{(a-1)} (1-x)^{(b-1)} dx \text{ là hội tụ dưới dấu tích phân.}$$

Chứng minh:

Ta chia ra 2 cận tương ứng với 2 hàm không xác định tại các cận đó

$$\text{Tại cận 0: } \int_0^1 x^{(a-1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{(1-a)}} dx,$$

Hội tụ nếu $1-a < 1 \implies a > 0$ (hiển nhiên).

$$\text{Tại cận 1: } \int_0^1 (1-x)^{(b-1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{(1-b)}} dx$$

Hội tụ nếu $1-b < 1 \implies b > 0$ (hiển nhiên). ■**Ví dụ 1:** Chứng minh:

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)},$$

*Giải:*Từ điểm (m, n) chọn hướng đi xuống $\rightarrow (m+1, n-1) \rightarrow (m+2, n-2) \rightarrow (m+2, n-3) \rightarrow \dots \rightarrow (m+n, 0)$, như sau:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^1 \underbrace{(1-x)^n}_u \underbrace{x^m}_{dv} dx = 0 + \int_0^1 \frac{n}{m+1} (1-x)^{n-1} x^{m+1} dx = \frac{n}{m+1} I_{m+1, n-1} \\ &= \frac{n}{m+1} \frac{n-1}{m+2} I_{m+2, n-2} = \dots = \frac{n}{m+1} \frac{n-1}{m+2} \frac{n-2}{m+3} \dots I_{m+n, 0}, \end{aligned}$$

$$I_{m+n, 0} = \int_0^1 x^{m+n} dx = \frac{1}{m+n+1}$$

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} \frac{n-1}{m+2} \frac{n-2}{m+3} \dots \frac{1}{m+n+1} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$$

Ví dụ 2: Với ví dụ trên thì hàm beta sẽ là:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Do công thức đối xứng với m, n : nên công thức này còn có dạng:

$$B(m, n) = B(n, m) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Ví dụ 3. Chứng minh:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

Do công thức đối xứng với m, n: nên công thức trên còn có dạng:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

Giải:

Từ $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, ta đặt $x = \sin^2 \theta$

$$\Rightarrow B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad \blacksquare$$

Ví dụ 4: Tính: a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta$, b) $\int_0^{\pi} \cos^4 \theta d\theta$, c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-1/2} \theta d\theta$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos^7 \theta d\theta$, e) $\int_0^{\pi} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta$, f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta$

Giải:

Hãy so sánh các công thức ở 2.7 bài 2 với các công thức ở đây.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta$, $2m-1=4, 2n-1=6 \Rightarrow m = \frac{5}{2}, n = \frac{7}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\Gamma(6)} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3\pi}{512}$$

b) $\int_0^{\pi} \cos^4 \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ do đặt $\theta = \frac{\pi}{2} - x$

$2m-1=4, 2n-1=0 \Rightarrow m = \frac{5}{2}, n = \frac{1}{2}$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{2 \times 1} = \frac{3\pi}{8}$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-1/2} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-1/2} \theta \cos^{1/2} \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Do $2m-1 = -\frac{1}{2}$, $2n-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{4}, n = \frac{3}{4}$, và $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(z\pi)}$

$$c') \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-1/3} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-1/3} \theta \cos^{1/3} \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Do $2m-1 = -\frac{1}{3}$, $2n-1 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}, n = \frac{2}{3}$, và $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(z\pi)}$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos^7 \theta d\theta, \quad 2m-1=5, 2n-1=7 \Rightarrow m=3, n=4$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos^7 \theta d\theta = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{2\Gamma(3+4)} = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{2\Gamma(7)} = \frac{2 \times 1 \cdot 3 \times 2 \times 1}{2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{120}$$

e) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta$, do đặt $\theta = \frac{\pi}{2} - x$, ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cdot \cos^6 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \sin^6 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \sin^6 x dx =$$

Ta có: $2m-1=4, 2n-1=6 \Rightarrow m = \frac{5}{2}, n = \frac{7}{2}$

$$= 2 \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3\pi}{256}$$

$$f) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta, \quad 2m-1=4, 2n-1=5 \Rightarrow m = \frac{5}{2}, n = 3$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)}{2\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot 2 \times 1}{2 \times \frac{9}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} = \frac{8}{315} \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP

1/ Xét sự hội tụ của tích phân và tìm trị hội tụ nếu có

a/ $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ b/ $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ c/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ d/ $\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$

e/ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ f/ $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ g/ $\int_0^1 \frac{\ln^2 x dx}{x}$ h/ $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2-1}$

2/ Xét sự hội tụ của tích phân sau:

a/ $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x}$ b/ $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x^2}$ c/ $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$ d/ $\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^2) dx}{x^3}$

e/ $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$ f/ $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$ g/ $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ h/ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$

CHƯƠNG 4

HÀM NHIỀU BIẾN

BÀI 1: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1 Định nghĩa hàm nhiều biến

Định nghĩa:

Nếu có sự tương ứng mỗi cặp $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ với duy nhất giá trị $z \in \mathbb{R}$ thì ta gọi sự tương ứng đó là hàm số z theo 2 biến độc lập x, y , kí hiệu: $z = z(x, y)$, hay $z = f(x, y)$. D gọi là miền xác định của hàm z .

Ví dụ 1: $z = z(x, y) = x^2 + y^2$ ta có $D = \mathbb{R}^2$

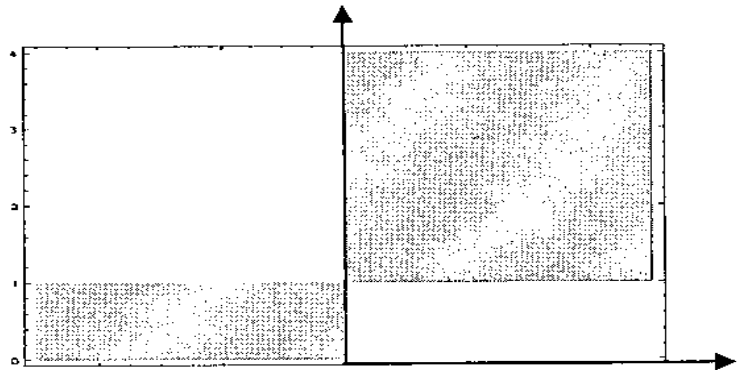
Ví dụ 2: $z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

ta có $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 4\}$ chính là hình tròn tâm $(0; 0)$ bán kính 2, không kể biên.

Ví dụ 3: $z = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^4}$ ta có: $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$

Ví dụ 4: $z = \sqrt{x \ln y}$

z xác định khi $x \cdot \ln y \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ và } y \geq 1)$
 hay $(x < 0 \text{ và } 0 < y < 1)$.



Vậy

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0, 0 < y < 1\}$$

1.2 Giới hạn

Định nghĩa:

Hàm $z = z(x, y)$ xác định tại vùng lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể không xác định tại điểm M_0 , được gọi là có giới hạn là A tại M_0 khi $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall M \in \mathbb{R}^2: d(M, M_0) = |MM_0| \\ = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |z(x, y) - A| < \varepsilon$$

$$\text{Kí hiệu: } \lim_{M \rightarrow M_0} z(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} z(x, y) = A$$

Chú ý:

$$1) M \rightarrow M_0 \Leftrightarrow d(M, M_0) \rightarrow 0$$

2) Giới hạn lặp: nếu xét thứ tự lấy của giới hạn thì tổng quát ta có:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} z(x, y)) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} z(x, y))$$

3) Nếu có giới hạn thì giới hạn đó không phụ thuộc vào hướng tiến của điểm $M(x, y)$ đến điểm $M_0(x_0, y_0)$.

4) $z(x, y)$ có giới hạn tại (x_0, y_0) thì giới hạn này là duy nhất và có:

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} z(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} z(x, y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} z(x, y))$$

5) Khái niệm giới hạn vô hạn cùng với các định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hàm một biến cũng đúng với hàm hai biến.

6) Định lý giới hạn kẹp vẫn còn đúng trong trường hợp hai biến.

Ví dụ 1.
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} (2x + 3y) = 8$$

Xem $\varepsilon > 0$ cho trước, vì hàm $2x$ có giới hạn là 2 khi $x \rightarrow 1$, tương tự hàm $3y$ có giới hạn là 6 khi $y \rightarrow 2$, nên theo định nghĩa về giới hạn của từng hàm, ta sẽ tìm được $\alpha_x = \frac{\varepsilon}{4} > 0$, $\alpha_y = \frac{\varepsilon}{6} > 0$ tương ứng sao cho:

$$|x - 1| < \alpha_x = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |2x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y - 2| < \alpha_y = \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |3y - 6| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Chọn $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{6}, \frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{\varepsilon}{6}$, lúc đó với tâm $M_0(1, 2)$, và mọi điểm

$M(x, y)$ nằm trong vòng tròn tâm $M_0(1, 2)$, bán kính $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$, ta có hai cạnh góc vuông $|x - 1|$ và $|y - 2|$ đều nhỏ hơn cạnh huyền $|M_0M|$, nên:

$$|x - 1| < |M_0M| < \delta = \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{4} = \alpha_x \Rightarrow |2x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{và } |y - 2| < |M_0M| < \delta = \frac{\varepsilon}{6} = \alpha_y \Rightarrow |3y - 6| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{vậy } |2x + 3y - 8| \leq |2x - 2| + |3y - 6| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ví dụ 2: Tìm
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Đặt $x = Ky$, với K là hằng số, $y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$

$$\text{Ta có } \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{K^2 - 1}{1 + K^2} = A$$

Giới hạn này phụ thuộc vào K , nên giới hạn không tồn tại.

Chẳng hạn $K = 0$ thì $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} A = -1$, $K = 1/2$ thì $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} A = -3/5$

Ví dụ 3:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{y^2} (1-\cos y) \quad \text{Có dạng } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{y^2} (1-\cos y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{\frac{y^2}{4}} 2 \cdot \left(\sin \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 4: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{y}$

Ta có: $\left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x|$ Vì thế $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0$

Ví dụ 5: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$

Vì: $\left| x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right| \leq |x| \cdot \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 6: $f(x,y) = \frac{3x-y}{x+5y}$, có $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3x-y}{x+5y} \right) = 3$

$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-y}{x+5y} \right) = -\frac{1}{5}$, nhưng $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x-y}{x+5y}$ không tồn tại vì

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0,0), \quad (x'_n, y'_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0,0)$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{2/n}{6/n} \rightarrow \frac{1}{3}, \quad f(x'_n, y'_n) = \frac{5/n}{7/n} \rightarrow \frac{5}{7}$$

1.3 Liên tục

Định nghĩa 1:

Hàm $z = z(x,y)$ liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0)$
 $\Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow M_0} z(x,y) = z(M_0) = z(x_0, y_0)$

Định nghĩa 2:

Hàm $z = z(x,y)$ liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ khi nó liên tục $\forall M \in D$

BÀI 2: ĐẠO HÀM - VI PHÂN - ỨNG DỤNG

2.1 Đạo hàm riêng:

Coi hàm $z = z(x,y)$ xác định và liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$, nếu cho biến $y = y_0$ không đổi, lúc này hàm $z(x,y)$ là hàm 1 biến theo x và ta có thể lấy đạo hàm 1 biến (đã biết) theo biến x .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x} = z'_x(x_0, y_0)$$

Và ta kí hiệu $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ là đạo hàm riêng theo biến x.

Tương tự ta định nghĩa đạo hàm riêng theo biến y: $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$

Ví dụ: $z = x^2y^3 + x^4 \Rightarrow z'_x = 2xy^3 + 4x^3 \quad z'_y = 3x^2y^2$

2.2 Đạo hàm riêng bậc cao:

a) Đạo hàm hỗn hợp

Lấy đạo hàm theo biến x của hàm $z'_y(x,y)$, ta được z''_{yx} là đạo hàm 2 lần theo biến y trước rồi tới biến x sau. Vậy thì giữa z''_{xy} và z''_{yx} có khác nhau không ?

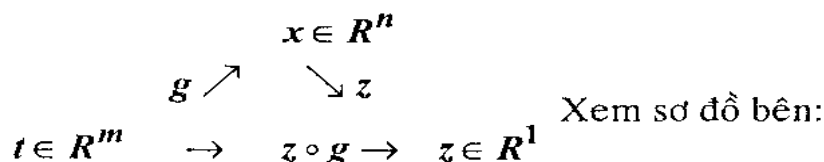
Định lý (Schwarz):

Giả sử z'_x, z'_y, z''_{xy} tồn tại và liên tục thì có z''_{yx} và $z''_{xy} = z''_{yx}$

Ví dụ: $f = x^2y^3 + x^4 \Rightarrow f''_{xy} = 6xy^2 = f''_{yx} = 6xy^2$

b) Tương tự ta có thể lấy đạo hàm cấp n theo biến x, cấp m theo biến y kí hiệu là $f^{(n+m)}_{x^n y^m}$ Và có tất cả $\frac{(n+m)!}{n!m!}$ cách biểu diễn $f^{(n+m)}_{x^n y^m}$

2.3 Đạo hàm hợp:



$t = (t_1, \dots, t_m) \in R^m, x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, z = z(x) = z(x_1, \dots, x_n) \in R,$

$R^m \ni t \mapsto x = x(t) = g(t) \in R^n$, ta có đạo hàm hợp của $z \circ g(t)$ như sau:

$$z'_{t_1} = z'_{x_1} (x_1)'_{t_1} + z'_{x_2} (x_2)'_{t_1} + \dots + z'_{x_n} (x_n)'_{t_1}$$

$$z'_{t_2} = z'_{x_1} (x_1)'_{t_2} + z'_{x_2} (x_2)'_{t_2} + \dots + z'_{x_n} (x_n)'_{t_2}$$

$$z'_{t_m} = z'_{x_1} (x_1)'_{t_m} + z'_{x_2} (x_2)'_{t_m} + \dots + z'_{x_n} (x_n)'_{t_m}$$

Ta có thể viết đạo hàm hợp của $z \circ g(t)$ dưới dạng ma trận như sau:

(ta sẽ thấy rõ hơn ở toán C2)

$$M_{1 \times m} \ni \nabla(z \circ g) = \nabla(z) \times \nabla(g) \in M_{1 \times n} \times M_{n \times m} = M_{1 \times m}$$

$$\begin{bmatrix} z'_{t_1} & z'_{t_2} & \dots & z'_{t_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_{x_1} & z'_{x_2} & \dots & z'_{x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1)'_{t_1} & (x_1)'_{t_2} & \dots & (x_1)'_{t_m} \\ (x_2)'_{t_1} & (x_2)'_{t_2} & \dots & (x_2)'_{t_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n)'_{t_1} & (x_n)'_{t_2} & \dots & (x_n)'_{t_m} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1: $z = z(x) = z(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^3$, $(x_1, x_2) = (3t_1 + t_2^2, t_1^2 + t_2^4)$

Tính z'_{t_1} , z'_{t_2} :

$$\begin{bmatrix} z'_{t_1} & z'_{t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_{x_1} & z'_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1)'_{t_1} & (x_1)'_{t_2} \\ (x_2)'_{t_1} & (x_2)'_{t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2t_2 \\ 2t_1 & 4t_2^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z'_{t_1} &= z'_{x_1} (x_1)'_{t_1} + z'_{x_2} (x_2)'_{t_1} = 2x_1 \times 3 + (-3x_2^2) \times 2t_1 = \\ &= 18t_1 + 6t_2^2 - 6t_1(t_1^2 + t_2^4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{t_2} &= z'_{x_1} (x_1)'_{t_2} + z'_{x_2} (x_2)'_{t_2} = 2x_1 \times 2t_2 + (-3x_2^2) \times 4t_2^3 = \\ &= 4(3t_1 + t_2^2)t_2 - 12(t_1^2 + t_2^4)^2 t_2^3 \end{aligned}$$

Ta thường gặp: $z = z(x, y)$ và $(x, y) = (x(u, v), y(u, v)) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

lúc đó: $z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u$, $z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v$,

sinh viên suy nghĩ để tính: $z''_{uu} = ?$, $z''_{vv} = ?$, $z''_{uv} = ?$

$$z''_{uu} = (z'_x x'_u + z'_y y'_u)'_u = (z'_x x'_u)'_u + (z'_y y'_u)'_u, \text{ trong đó:}$$

$$(z'_x x'_u)'_u = z''_{xx} x'_u x'_u + z''_{xy} y'_u x'_u + z''_{yx} x'_u x'_u + z''_{yy} y'_u y'_u, \dots\dots$$

Chú ý: Các công thức về các đạo hàm bậc cao hỗn hợp như z''_{uv} , $z'''_{v^2 u}$, $z'''_{u^2 v}$, ... rất khó biểu diễn bằng công thức tổng quát (công thức rất phức tạp và khó nhớ), nhưng trong từng bài toán cụ thể ta có thể tính chúng dễ dàng, bằng cách chuyển tất cả biến x, y về biến u, v , sau đó ta lấy đạo hàm theo hai biến u, v bình thường như ví dụ sau:

Ví dụ 2: $z = z(x, y) = x^2 y$, $(x, y) = \left(3u - v, \frac{u}{v}\right)$, Tính z'_u, z'_v, z''_{uv}

$$x'_u = 3, \dots, z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u = 2xy \cdot 3 + x^2 \frac{1}{v} = 6(3u - v) \frac{u}{v} + \frac{(3u - v)^2}{v}$$

....., lấy đạo hàm thêm lần nữa, cuối cùng ta có: $z''_{uv} = -27 \frac{u^2}{v^2} + 1$

Ví dụ 3: Chứng minh:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} K(u, t) du \right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K(u, t)}{\partial t} du + K\{b(t), t\} \frac{db}{dt} - K\{a(t), t\} \frac{da}{dt}$$

Gọi $F(u, t)$ là nguyên hàm của $K(u, t)$ theo biến u , ta có:

$$F'_u(u, t) = K(u, t) \quad (*)$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} K(u, t) du \right)' &= \left(F(u, t) \Big|_{a(t)}^{b(t)} \right)' = [F(b(t), t) - F(a(t), t)]'_t = \\ &= F'_t(b(t), t) + F'_b(b(t), t) \cdot b'_t - [F'_t(a(t), t) + F'_a(a(t), t) \cdot a'_t] = \\ &= [F'_t(b(t), t) - F'_t(a(t), t)] + \{F'_b(b(t), t) \cdot b'_t - F'_a(a(t), t) \cdot a'_t\} \quad (**) \end{aligned}$$

Từ (*) ta có: $F'_b(b(t), t) = K(b(t), t)$, tương tự: $F'_a(a(t), t) = K(a(t), t)$

Cũng từ (*) ta có: $F'_t(b(t), t) - F'_t(a(t), t) = \int_{a(t)}^{b(t)} K'_t(u, t) du$, điều này chỉ

được nếu $[F'_t(u, t)]'_u = K'_t(u, t)$, điều này hiển nhiên vì lấy đạo hàm

theo biến t hai vế của (*) và chú ý: $F''_{t,u}(u, t) = F''_{u,t}(u, t) = K'_t(u, t)$

$$\text{Vậy ở (**)} = \int_{a(t)}^{b(t)} K'_t(u, t) du + K\{b(t), t\} \frac{db}{dt} - K\{a(t), t\} \frac{da}{dt} \blacksquare$$

2.3 Đạo hàm ẩn:

Vấn đề là ta tìm được đạo hàm ẩn mà không cần giải phương trình để tìm ra hàm tường minh.

a/ Xét phương trình $F(x, y) = 0$, trong đó hàm chứa một hàm y theo x , lúc đó ta lấy đạo hàm theo x hai vế ta có:

$$F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{-F'_x}{F'_y}$$

b/ Tương tự phương trình $F(x,y,z) = 0$ trong đó $z = z(x,y)$ là ẩn hàm hiện hữu ta có:

$$\begin{cases} F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \\ F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z} \\ z'_y = \frac{-F'_y}{F'_z} \end{cases}$$

Ví dụ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Cách 1: áp dụng công thức trên ta có

$$z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z} = \frac{-2x}{2z} = \frac{-x}{z}$$

Cách 2: $z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$z'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{z}$$

c/ Mở rộng ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

trong hệ này có chứa hai ẩn hàm $u = u(x,y)$ và $v = v(x,y)$ với 1 số điều kiện nào đó, đạo hàm theo x ta có:

$$\begin{aligned} F'_x + F'_u \cdot u'_x + F'_v \cdot v'_x &= 0 \\ G'_x + G'_u \cdot u'_x + G'_v \cdot v'_x &= 0 \end{aligned}$$

giải hệ phương bằng Cramer ta có:

$$u'_x = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{J} = -\frac{1}{J} \frac{D(F,G)}{D(x,v)}, \quad v'_x = -\frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}}{J} = -\frac{1}{J} \frac{D(F,G)}{D(u,x)}$$

với
$$J = \frac{D(F,G)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

d/ Mở rộng nữa bằng qui nạp hình thức ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} F(x, y, u, v, w) = 0 \\ G(x, y, u, v, w) = 0 \\ H(x, y, u, v, w) = 0 \end{cases}$$

trong hệ này có chứa ba ẩn hàm $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ và $w = w(x,y)$.

Tìm u'_x , v'_y , w'_y ?

$$u'_x = -\frac{1}{J} \frac{D(F,G,H)}{D(x,v,w)}, \quad v'_y = -\frac{1}{J} \frac{D(F,G,H)}{D(u,y,w)}, \quad w'_y = -\frac{1}{J} \frac{D(F,G,H)}{D(u,v,y)}$$

trong đó $J = \frac{D(F,G,H)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v & F'_w \\ G'_u & G'_v & G'_w \\ H'_u & H'_v & H'_w \end{vmatrix};$

$$\frac{D(F,G,H)}{D(u,v,y)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v & F'_y \\ G'_u & G'_v & G'_y \\ H'_u & H'_v & H'_y \end{vmatrix} \dots \dots$$

e/ Mở rộng ta có hệ phương trình: $\begin{cases} F(x, y(x), u(x)) = 0 \\ G(x, y(x), u(x)) = 0 \end{cases}$

trong hệ này có chứa ba ẩn hàm $y = y(x)$, và $u = u(x,y)$.

Tìm u'_x, y'_x ? tương tự như trên, xem như bài tập.

2.4 Đạo hàm ngược:

Giống như hàm 1 biến, $y=f(x)$ điều kiện hàm $f(x)$ để có hàm ngược và khả vi, lúc đó đạo hàm ngược là: $x'(y) = \frac{1}{y'_x}$, tương tự hàm 2 biến phép biến

đổi: $F(x,y) \leftrightarrow (u,v)$ đòi hỏi phải có phép biến đổi ngược và khả vi, trước khi có đạo hàm ngược theo nghĩa như sau:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \left(\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right)^{-1},$$

trong đó: $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$

Với hàm 3 biến ta cũng có:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}} = \left(\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} \right)^{-1}, \quad \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}$$

2.5 Vi phân:

2.5.1 Vi phân cấp 1

Định nghĩa hàm khả vi:

$(x_0, y_0) \in D$, cho các số gia $\Delta x, \Delta y$ sao cho $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$. Ta nói hàm $z = f(x, y)$ **khả vi** tại (x_0, y_0) nếu số gia toàn phần:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

Có thể biểu diễn được ở dạng: $\Delta f = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \theta(\Delta x, \Delta y)$

Trong đó A, B là hai số thực, $\theta(\Delta x, \Delta y)$ là vô cùng bé bậc cao hơn

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \text{ nghĩa là: } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\theta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0,$$

$$\text{tức } \theta(\Delta x, \Delta y) = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) \rightarrow 0, \text{ khi } \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$$

Khi đó ta gọi đại lượng $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ là vi phân của hàm f tại (x_0, y_0)

kí hiệu: $df(x_0, y_0) = A \Delta x + B \Delta y$

Ví dụ: Cho $f(x, y) = x^2 + y^2$ Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - x_0^2 - y_0^2 \\ &= 2x_0 \cdot \Delta x + 2y_0 \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } A = 2x_0 \quad ; \quad B = 2y_0 \quad ; \quad \theta(\Delta x, \Delta y) = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\theta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$$

Vậy hàm f khả vi tại (x_0, y_0) .

Định lý (ĐK cần về khả vi)

$z = f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì tại M_0 tồn tại f'_x, f'_y , biểu thức

A, B chính là: $A = f'_x(M_0)$ và $B = f'_y(M_0)$ và

$$\Delta z = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y \Leftrightarrow dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

Đây là dạng vi phân bậc một: $df = f'_x dx + f'_y dy \Leftrightarrow dz = z'_x dx + z'_y dy$

Định lý (ĐK đủ về khả vi)

$z = f(x, y)$ có f'_x, f'_y và thêm f'_x, f'_y liên tục $\forall M(x, y) \in D_f$ và x, y là các biến độc lập thì f khả vi tại $M(x, y)$.

Ví dụ sau đây sẽ chứng tỏ rằng một hàm f có thể có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) không chắc khả vi tại (x_0, y_0)

Ví dụ: $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ không khả vi tại $(0, 0)$

Thật vậy, nếu f khả vi tại $(0, 0)$ thì ta có:

$$\theta(\Delta x, \Delta y) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - A \cdot \Delta x - B \cdot \Delta y$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0; B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Suy ra:

$$\theta(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\theta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Giới hạn này không tiến đến 0, vì nếu chọn:

$$\Delta x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0; \Delta y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0. \text{ Thì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Điều này dẫn đến f không khả vi tại (0,0).

2.5.2 Vi phân cấp n.

Giống vi phân bậc một hàm một biến: $f = f(x) \Rightarrow df = f'_x dx$, ta có:

Vi phân cấp 1: $df = f'_x dx + f'_y dy \Leftrightarrow dz = z'_x dx + z'_y dy$

Vi phân cấp 2:

$$d^2 f = d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy) = f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy^2$$

Vi phân cấp 3:

$$d^3 f = f^{(3)}_{x^3} dx^3 + 3f^{(3)}_{x^2 y} dx^2 dy + 3f^{(3)}_{x y^2} dx dy^2 + f^{(3)}_{y^3} dy^3$$

Vi phân cấp n:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n (f) = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(n)}_{x^i y^{n-i}} dx^i dy^{n-i}$$

Ví dụ: $z = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$ Tính $d^2 z$

Cách 1: áp dụng vi phân cấp 2 ta có ngay:

$$d^2 z = (12x^2 - 8y^2) dx^2 - 32xy dx dy + (12y^2 - 8x^2) dy^2$$

Cách 2: $dz = 4x^3 dx + 4y^3 dy - 4(2xy^2 dx + 2yx^2 dy)$

$$\text{Vậy } d^2 z = d(dz) = 12x^2 dx^2 + 12y^2 dy^2 - 8dx(y^2 dx + 2yx dy) - 8dy(x^2 dy + 2xy dx)$$

Rút gọn ta có: $d^2 z = (12x^2 - 8y^2) dx^2 - 32xy dx dy + (12y^2 - 8x^2) dy^2$

2.6 Công thức Taylor cho hàm hai biến.

2.6.1 Định lý Taylor

Hàm $f: R^2 \supset D \rightarrow R$, có đạo hàm riêng cấp n liên tục trên D , Với $(x, y) \in D$ và $(h, k) \in R^2$ sao cho: $(x + th, y + tk) \in D$, với mọi $t \in [0, 1]$. Khi đó tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[h^2 f''_{xx}(x, y) + 2hkf''_{xy}(x, y) + k^2 f''_{yy}(x, y) \right] + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{i=n-1} C_{n-1}^i h^i k^{n-1-i} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^i \partial y^{n-1-i}}(x, y) \\ &+ \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i h^i k^{n-i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x + \theta h, y + \theta k) \end{aligned}$$

Nhân xét: Nếu viết theo dạng vi phân ta có:

$$f(x+h, y+k) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\frac{d^i f(x, y)}{i!} \right) + \frac{d^n f(x + \theta h, y + \theta k)}{n!}$$

Chú ý: $\frac{d^0 f}{0!}(x, y) = f(x, y)$

Ví dụ:

Giống như Taylor 1 biến:

$$f(0+x) = f(0) + \frac{f'_x(0)}{1!} x + \frac{f''_x(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f_x^{(n)}(0)}{n!} x^n +$$

$$\bullet f(0+x, 0+y) = f(0, 0) + (f'_x x + f'_y y) + \frac{1}{2!} (f''_{xx} x^2 + 2f''_{xy} xy + f''_{yy} y^2) +$$

$$+ \frac{1}{3!} (f'''_{xxx} x^3 + 3f'''_{xxy} x^2 y + 3f'''_{xyy} xy^2 + f'''_{yyy} y^3) +$$

$$+ \frac{1}{4!} \left(f^{(4)}_{x^4} x^4 + 4f^{(4)}_{x^3 y} x^3 y + 6f^{(4)}_{x^2 y^2} x^2 y^2 + 4f^{(4)}_{xy^3} xy^3 + f^{(4)}_{y^4} y^4 \right) + \dots$$

$$\bullet f(x+h, y+k) = f(x, y) + (f'_x h + f'_y k) + \frac{1}{2!} (f''_{xx} h^2 + 2f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2) +$$

$$+ \frac{1}{3!} (f'''_{xxx} h^3 + 3f'''_{xxy} h^2 k + 3f'''_{xyy} hk^2 + f'''_{yyy} k^3) +$$

$$+ \frac{1}{4!} \left(f^{(4)}_{x^4} h^4 + 4f^{(4)}_{x^3 y} h^3 k + 6f^{(4)}_{x^2 y^2} h^2 k^2 + 4f^{(4)}_{xy^3} hk^3 + f^{(4)}_{y^4} k^4 \right) + \dots$$

Tương tự các khai triển cụ thể và mở rộng cho 3 biến như sau:

$$\bullet f(0+x, 0+y, 0+z) = f(0, 0, 0) + (f'_x x + f'_y y + f'_z z) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx} x^2 + f''_{zz} z^2 + f''_{yy} y^2 + 2f''_{xy} xy + 2f''_{xz} xz + 2f''_{yz} yz \right) + \\
 & \frac{1}{3!} \left\{ f'''_{x^3} x^3 + f'''_{z^3} z^3 + f'''_{y^3} y^3 + 3 \left[f'''_{x^2 y} x^2 y + f'''_{x z^2} x z^2 + f'''_{y z^2} y z^2 \right] + \right. \\
 & \left. + 3 \left[f'''_{x^2 y} x^2 y + f'''_{x^2 z} x^2 z + f'''_{y^2 z} y^2 z \right] + 6f'''_{xyz} xyz \right\} + \\
 & + \frac{1}{4!} \sum_{a+b+c=4} \frac{4!}{a!b!c!} f^{(4)}_{x^a y^b z^c} x^a y^b z^c, \text{ với } (a, b, c = \overline{0, 4}) + \dots
 \end{aligned}$$

2.6.2 Tính gần đúng

Theo định nghĩa vi phân ta có:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y$$

Áp dụng công thức trên ta có cách tính gần đúng giá trị một biểu thức như sau:

Ví dụ 1: Tính gần đúng $A = \sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$

Đặt $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, $x_0 = 1, y_0 = 2, \Delta x = 0.02, \Delta y = -0.03$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 A = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) & \approx f(1, 2) + f'_x(1, 2) \cdot 0.02 + f'_y(1, 2) \cdot (-0.03) \\
 & \approx 3 + 0.5 \times (0.02) - 2 \times (0.03) = 2.95
 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Khai triển Taylor hàm số $f(x, y) = y^x = e^{x \ln y}$ trong lân cận điểm (1,1) đến bậc 2, và tính gần đúng giá trị của biểu thức **1.2^{1.01}**

$$f(1, 1) = 1$$

$$f'_x(x, y) = y^x \ln y \Rightarrow f'_x(1, 1) = 0$$

$$f'_y(x, y) = \left(y^x \right)'_y = x y^{x-1} \Rightarrow f'_y(1, 1) = 1$$

$$f''_{xx}(x, y) = y^x \ln^2 y \Rightarrow f''_{xx}(1, 1) = 0$$

$$f''_{xy}(x, y) = y^{x-1} (x \ln y + 1) \Rightarrow f''_{xy}(1, 1) = 1$$

$$f''_{yy}(x, y) = x \left(y^{x-1} \right)'_y = x(x-1) y^{x-2} \Rightarrow f''_{yy}(1, 1) = 0$$

Vậy:

$$y^x = f(x, y) = f(1 + [x-1], 1 + [y-1]) = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + R_2$$

$$R_2 = \frac{d^3 f}{3!} (1 + \theta(x-1), 1 + \theta(y-1)), \text{ thỏa } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{R_2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0$$

Suy ra: $1.2^{1.01} = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) = 1 + 0.2 + 0.01 \times 0.2 = 1.202$

2.7 Ứng dụng đạo hàm.

Định nghĩa:

- Xét $z = f(x,y)$ có $M_0(x_0, y_0)$ là cực đại địa phương nếu và chỉ nếu:
 $M_0 \neq \forall M(x,y) \in$ lân cận nào đó của $M_0: f(M) \leq f(M_0)$
 Tương tự ta định nghĩa cho cực tiểu là $f(M) \geq f(M_0)$.
- Điểm dừng (tối hạn) $M_0(x_0, y_0)$ là điểm thoả:

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

2.7.1 Cực trị tự do hàm 2 biến.

Bài toán: Tìm cực trị của hàm hai biến $z=f(x,y)$.

Định lý về điều kiện cần:

$z = f(x,y)$ có cực trị địa phương tại $M_0(x_0, y_0)$, và các đạo hàm riêng tồn tại
 $\implies M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng.

Định lý về điều kiện đủ: Nếu $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng, thì chưa chắc $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị, mà cần phải có thêm những điều kiện cụ thể về đạo hàm bậc hai như phương pháp sau:

Định lý về điều kiện đủ (phương pháp tìm điểm cực trị)

- Tìm điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$, giải hệ: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$

- Tính $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}_{M_0} = AC - B^2$, trong đó:

$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$$

- ♣ Nếu: $\Delta > 0, A > 0 \implies$ hàm số đạt cực tiểu tại $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A < 0 \implies$ hàm số đạt cực đại tại $M_0(x_0, y_0)$

- ♣ Nếu: $\Delta < 0 \implies M_0$ không là cực trị, M_0 còn gọi là điểm yên ngựa

- ♣ Nếu: $\Delta = 0$ dùng trực tiếp định nghĩa để xét cực trị

Chú ý: cực trị phát biểu toàn bộ chương này, theo nghĩa, cực trị địa phương, nghĩa là cực trị trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Chứng minh:

Dùng công thức Taylor

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + (f'_x h + f'_y k) + \\ + \frac{1}{2!} (f''_{xx} h^2 + 2f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2) + o(h^2 + k^2)$$

chú ý $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ Nên

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \\ &= \frac{1}{2!} \left(f''_{xx} h^2 + 2f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2 \right) + 0(h^2 + k^2) \end{aligned} \quad (1)$$

Chú ý: $(f''_{xx} h^2 + 2f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ là tam thức bậc hai đối xứng theo h và k. Ta xét 3 trường hợp sau:

- Nếu: $\Delta > 0$, nghĩa là: $f''_{xx} f''_{yy} > (f''_{xy})^2 \geq 0$, nên cả hai f''_{xx} và f''_{yy} phải khác 0 và cùng dấu, đối xứng, Lúc này có thể viết lại (1) như sau: $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$

$$= \frac{1}{2f''_{xx}} \left[(f''_{xx} h + f''_{xy} k)^2 + k^2 \Delta \right] + 0(h^2 + k^2)$$

thì dấu của ngoặc [...] là

lớn hơn 0, với h, k đủ nhỏ và $k \neq 0$, còn nếu $k=0$ chọn $h \neq 0$ Vậy vế trái chỉ phụ thuộc vào dấu của f''_{xx} . Nên nếu:

♦ $A = f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ thì $f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$, $M_0(x_0, y_0)$ CT.

♦ $A = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ thì $f(x_0 + h, y_0 + k) < f(x_0, y_0)$, $M_0(x_0, y_0)$ CD.

- Nếu: $\Delta < 0$, ta xét một đường nhánh đặc biệt: $k = h.t$ thì (1) viết lại như sau:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \quad (2) \\ &= \frac{1}{2} h^2 \left[f''_{yy} t^2 + 2f''_{xy} t + f''_{xx} \right] + 0(h^2 + h^2 t^2). \end{aligned}$$

Hàm theo t: $F(t) = [f''_{yy} t^2 + 2f''_{xy} t + f''_{xx}]$, có biệt thức:

$(f''_{xy})^2 - f''_{xx} f''_{yy} = -\Delta > 0$, nghĩa là $F(t)=0$ có nghiệm, tức $F(t)$ có dấu âm và dương, nên vế trái (2) cũng có dấu âm và dương với h đủ nhỏ, do đó không có cực trị.

Ta có thể lý luận theo cách khác: Giả sử với $A \neq 0 > 0$

$$\varphi(h, k) = Ah^2 + 2Bkh + Ck^2 = \frac{(Ah + Bk)^2 + k^2(AC - B^2)}{A}$$

Chọn (h, k) để $(Ah + Bk) = 0$ và $k \neq 0$ thì $\varphi(h, k) < 0$.

Mặt khác: chọn (h, k) để $h \neq 0$ và $k = 0$ thì $\varphi(h, k) > 0$.

Vậy $\varphi(h, k)$ không xác định dấu. Tương tự $A \neq 0 < 0$,

Tương tự với $C \neq 0 > 0, C \neq 0 < 0$, ta dùng:

$$\varphi(h, k) = Ah^2 + 2Bkh + Ck^2 = \frac{(Bh + Ck)^2 + h^2(AC - B^2)}{C}$$

Còn $A=C=0$ thì $\varphi(h, k) = Ah^2 + 2Bkh + Ck^2 = 2Bkh$ càng không xác định dấu.

- Nếu: $\Delta = AC - B^2 = 0$, trường hợp này là suy biến. Thật vậy:

- ◆ Nếu $A=C=0 \implies B=0$, ta phải xét tiếp vì phân cấp 3.....

- ◆ Nếu A và C không đồng thời bằng 0, ta xét:

-Nếu $A \neq 0$.

$$Ah^2 + 2Bkh + Ck^2 = A\left(h + \frac{Bk}{A}\right)^2 + \frac{k^2(AC - B^2)}{A} = \frac{(Ah + Bk)^2}{A}, \text{ đây là}$$

DTP suy biến, chọn nhánh (h, k) sao cho: $Ah = -Bk$ thì

$$Ah^2 + 2Bkh + Ck^2 = 0. \text{ Tức } f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0),$$

nghĩa là M_0 không là cực trị.

-Nếu $C \neq 0$.

$$Ah^2 + 2Bkh + Ck^2 = C\left(k + \frac{Bh}{C}\right)^2 + \frac{h^2(AC - B^2)}{C} = \frac{(Ck + Bh)^2}{C},$$

đây là DTP suy biến, chọn nhánh (h, k) sao cho: $Ck = -Bh$ thì

$$Ah^2 + 2Bkh + Ck^2 = 0. \text{ Tức } f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0),$$

nghĩa là M_0 không là cực trị.

Nhận xét: Vì cả hai f''_{xx} và f''_{yy} là đối xứng, nên hệ số A, B có thể thay đổi vai trò cho nhau trong định lý.

Ví dụ 0: Cực tiểu của hàm

$$z = z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

là điểm $(0, 0)$ nhưng ngay cả $z'_x(0, 0)$

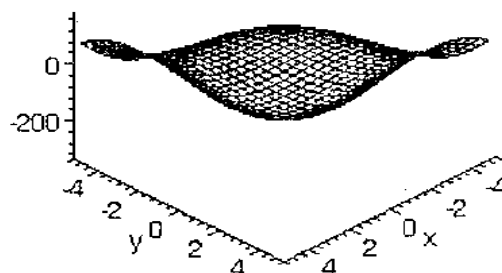
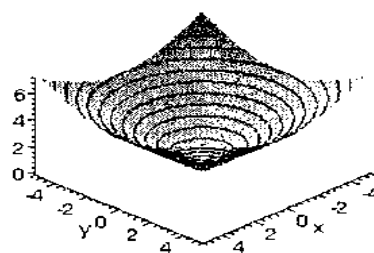
và $z'_y(0, 0)$ cũng không tồn tại,

phương chi nó là điểm dừng!

Ví dụ này giống hàm một biến

$$y = \sqrt{x^2} = |x|, \text{ không có đạo hàm tại}$$

$x=0$, nhưng nó vẫn là điểm cực tiểu.



Ví dụ 1: Tìm cực trị của hàm

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

- Tìm tập các điểm dừng:

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 0$$

$$z'_y = 3y^2 - 3x = 0$$

Giải hệ này ta có 2 điểm dừng là

$M_1(1,1)$ và $M_2(0,0)$

- Ta có: $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$

- ♣ Tại M_1 ta có $\Delta = AC - B^2 = 36 - 9 > 0$,

$A = 6 > 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu,

- ♣ Tại M_2 ta có $\Delta = -9 < 0$, nên M_2 không là điểm cực trị

Thật vậy: n đủ lớn ta có: $z\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) < 0$ và $z\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) > 0, \forall n$

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

- Tìm tập điểm dừng:

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0$$

- Tìm được duy nhất điểm dừng $O(0,0)$, ta tính tiếp các đạo hàm bậc 2 tại $O(0,0)$ ta được $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$.

$$z''_{xx} = \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}; \quad z''_{yy} = \frac{x^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad z''_{xy} = \frac{-xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

Vậy $\Delta = AC - B^2 = 1 > 0$, $A < 0$ ta kết luận O là điểm cực đại.

Ví dụ 3: Phân tích số dương a thành tổng 3 số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất

- Gọi 3 số dương là x , y , $a - x - y$, để hàm $z = xy(a - x - y)$ đạt cực đại, với điều kiện:

$$0 < x < a; \quad 0 < y < a; \quad 0 < a - x - y < a$$

- Ta có: $z'_x = ay - 2xy - y^2 = 0$

$$z'_y = ax - 2xy - x^2 = 0$$

Giải hệ này ta có 4 điểm dừng là:

$M_1(0,0)$, $M_2(0,a)$, $M_3(a,0)$, $M_4(a/3, a/3)$.

Ba điểm đầu không thỏa điều kiện trên, nên chỉ còn xét M_4 :

- Ta có: $z''_{x^2} = -2y$, $z''_{xy} = a - 2x - 2y$, $z''_{y^2} = -2x$

- Tại M_4 ta có: $A = \frac{-2a}{3}$, $B = \frac{-a}{3}$, $C = \frac{-2a}{3}$

Vậy: $\Delta = AC - B^2 = \frac{a^2}{3} > 0$, và $A < 0$ nên $M_4 \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right)$ là điểm cực đại, điều này ta có thể suy ngay từ bất đẳng thức Cauchy trong toán sơ cấp.

Ví dụ 4:

a/ Tìm cực trị hàm: $f(x, y) = x^2 + y^4 - y^5 - 2xy^2$

b/ Tìm cực trị hàm: $g(t) = f(ht, kt)$, với h, k là tham số, $h \neq 0$

Giải:

a/ $f'_x = 2x - 2y^2 = 0$, $f'_y = 4y^3 - 5y^4 - 4xy = 0 \Rightarrow (0, 0)$ duy nhất một điểm dừng.

$$A = f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 12y^2 - 20y^3 - 4x \Big|_{(0,0)} \Rightarrow C = 0, \quad f'_{xy} = -4y \Rightarrow B = 0$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0, \text{ Do } f(\varepsilon^2, \varepsilon) = -\varepsilon^5 < 0, \quad f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$$

$\Rightarrow (0, 0)$ không là cực trị.

$$b/ g(t) = f(ht, kt) = h^2 t^2 + k^4 t^4 - k^5 t^5 - 2hk^2 t^3$$

$$g'(t) = 2h^2 t + 4k^4 t^3 - 5k^5 t^4 - 6hk^2 t^2 = 0 \Rightarrow t = 0, \text{ xét tại } t=0.$$

$$g''(t) = \left(2h^2 + 12k^4 t^2 - 20k^5 t^3 - 12hk^2 t \right) \Big|_{t=0} = 2h^2 > 0, \quad h \neq 0$$

$g(t)$ cực tiểu tại $t=0$, $g(0) = f(0, 0)$ cực tiểu, có gì mâu thuẫn không?

2.7.2 Cực trị có điều kiện (vuông):

Bài toán mở đầu:

Tìm cực trị của hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ vuông trên mặt phẳng P cho trước $x + y - 1 = 0$.

Giải theo lối lớp 12 ta vẫn làm. Ta có:

$$y = 1 - x \rightarrow z = \sqrt{2} \sqrt{x - x^2} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$z'_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - 2x}{\sqrt{x - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad \text{xét dấu đạo hàm ta có điểm}$$

$M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ là điểm cực đại của hàm z trên mặt phẳng cắt P nửa hình cầu tâm O bán kính $R=1$.

Bài toán tổng quát:

Ta cần tìm cực trị của hàm $z = z(x, y)$ vuông bởi điều kiện mặt $\varphi(x, y) = 0$. Ta lấy ý tưởng của bài toán mở đầu ở trên. (i.e) ta giả sử có các điều

kiện đủ mạnh để có thể giải được ra hàm ẩn, chí nhất thì cũng theo nghĩa địa phương. Lúc đó $z = f(x, y(x))$ là hàm 1 biến và ta tìm cực trị theo nghĩa tự do của mục trước đã biết, lấy đạo hàm theo x ta có:

$$\begin{cases} f'_x + f'_y \cdot y'_x = 0 \\ \varphi'_x + \varphi'_y \cdot y'_x = 0 \end{cases}$$

giải hệ này ta giả sử: $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0, \quad \varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda$$

(đặt tỉ số này = $-\lambda$, hướng cực trị là hướng mà: $\overline{\nabla f} \parallel \overline{\nabla \varphi}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda \cdot \varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \cdot \varphi'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overline{\nabla L} = \vec{0}$$

Với hàm 3 biến $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$.

Đây là hệ 3 phương trình, 3 ẩn cần tìm là x, y, λ để tìm cực trị $M(x, y)$.

Mở rộng cho bài toán: Tìm cực trị của hàm $f(x, y, z)$ vướng bởi

$\varphi(x, y, z) = 0$ ta cũng dẫn tới hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda \cdot \varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \cdot \varphi'_y = 0 \\ f'_z + \lambda \cdot \varphi'_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overline{\nabla L} = \vec{0} \text{ với hàm 4 biến}$$

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \cdot \varphi(x, y, z)$$

Đây là hệ 4 phương trình, 4 ẩn x, y, z, λ để tìm điểm cực trị (x, y, z) .

Tóm lại: Với hàm hai biến: ta cần tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ vướng điều kiện: $\varphi(x, y) = 0$. Trong đó $f(x, y), \varphi(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục, $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0, \varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Ta chuyển về tìm cực trị tự do của hàm Lagrange như sau:

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

nghĩa là giải hệ phương trình $\overline{\nabla L} = \vec{0}$, tìm các điểm dừng, sau đó kết hợp điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ để làm tiếp các bước đã nêu của phương pháp tìm cực trị tự do.

Phương pháp: (Nhân tử Lagrange)

- Đặt hàm $L(x,y, \lambda) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$
- Tìm điểm dừng (x_0, y_0)

$$\overline{\nabla L} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} L'_x = f'_x + \lambda \varphi'_x = 0 \\ L'_y = f'_y + \lambda \varphi'_y = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Ta tính $d^2L = L''_{x^2} dx^2 + 2L''_{xy} dx dy + L''_{y^2} dy^2$ (*)
- Chú ý: $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0, dx^2 + dy^2 > 0$
- Nếu: $d^2L(x_0, y_0) > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu.
 $d^2L(x_0, y_0) < 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực đại.
 $d^2L(x_0, y_0) = 0$ thì (x_0, y_0) không là điểm cực trị.

- Thực ra L là hàm 3 biến, nên dạng vi phân bậc 2 phải ở dạng 3 biến:

$$d^2L = L''_{x^2} dx^2 + 2L''_{xy} dx dy + L''_{y^2} dy^2 + (L''_{\lambda^2} d\lambda^2 + 2L''_{x\lambda} dx d\lambda + 2L''_{y\lambda} d\lambda dy).$$

Biểu thức trong cặp ngoặc triệt tiêu do

$$L''_{\lambda^2} = 0, L''_{x\lambda} = \varphi'_x(x,y), L''_{y\lambda} = \varphi'_y(x,y) \text{ và } \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0.$$

Do đó d^2L cũng chỉ còn 2 biến như (*) khẳng định.

- Tương tự hàm 3 biến: $L(x,y,z, \lambda) = f(x,y,z) + \lambda \varphi(x,y,z)$
 Thì $d^2L = L''_{x^2} dx^2 + L''_{y^2} dy^2 + L''_{z^2} dz^2 + 2(L''_{xy} dx dy + L''_{xz} dx dz + L''_{yz} dy dz)$

Ví dụ 1: Tìm cực trị hàm $z = xy$ Thỏa

$$\varphi(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

+ Đặt: $L = z + \lambda \cdot \varphi = xy + \lambda [(x-1)^2 + y^2 - 1]$

+ Điểm dừng thấy ngay là: $O(x=0, y=0)$.

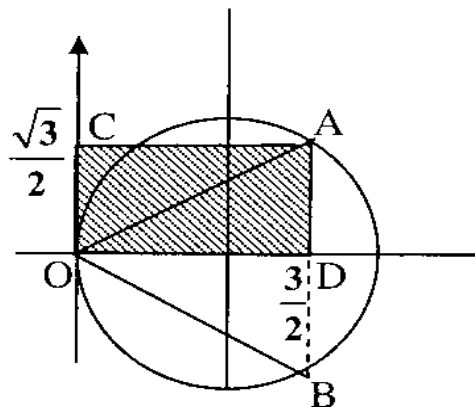
Giải hệ:

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda(x-1) = 0 \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L''_{x^2} = 2\lambda \\ L''_{y^2} = 2\lambda \\ L''_{xy} = 1 \end{cases}$$

loại nghiệm $M_0(x=0, y=0, \lambda: \text{không xác định})$

$\Rightarrow z = L = 0$, không là cực trị?

Ý nghĩa hình học như trên hình vẽ. Đó là diện tích hình chữ nhật



ODAC = xy, và bằng diện tích tam giác cân OAB tại O, Vậy diện tích lớn nhất trong các tam giác nội tiếp trong vòng tròn cho trước, chính là tam giác đều OAB như hình vẽ.

Tìm được $\lambda = \frac{-x}{2y}$, tại 2 điểm dừng $M_1(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda = \frac{-\sqrt{3}}{2})$ và

$M_2(\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2})$. Ta có: $d^2L = L''_{x^2} dx^2 + 2L''_{xy} dx dy + L''_{y^2} dy^2$

+ Tại $M_1(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda = \frac{-\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow d^2L = -\sqrt{3}(dx^2 + dy^2) + 2dx dy < 0$

Vì $d^2L = -\sqrt{3} \left(dy - \frac{dx}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} dx^2 < 0$

\Rightarrow hàm số đạt cực đại tại M_1 . $Z_{CD} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

+ Tại $M_2(\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow d^2L = \sqrt{3}(dx^2 + dy^2) + 2dx dy > 0$

Vì $d^2L = \sqrt{3} \left(dy + \frac{dx}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} dx^2 > 0$

\Rightarrow hàm số đạt cực tiểu tại M_2 . $Z_{CT} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Chú ý: tại $M_0(x=0, y=0, \lambda=0)$, xét 2 điểm

$M_\epsilon \left(\epsilon, \sqrt{1-(\epsilon-1)^2} \right), M'_\epsilon \left(\epsilon, -\sqrt{1-(\epsilon-1)^2} \right)$, ta có

$z(M_\epsilon) = \epsilon \sqrt{1-(\epsilon-1)^2} > 0$, trong khi $z(M'_\epsilon) = -\epsilon \sqrt{1-(\epsilon-1)^2} < 0$

hơn nữa: $d^2L = 0dx^2 + 2dx dy + 0dy^2 = 2dx dy$, có thể âm hay dương.

Cách 2: $xy \rightarrow \max \Rightarrow (xy)^2 = x^2(2x - x^2) = x^3(2-x) \rightarrow \max$

$\Rightarrow \frac{x}{3} \frac{x}{3} \frac{x}{3} (2-x) \rightarrow \max$, theo BĐT Cauchy:

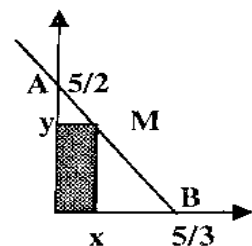
$\frac{x}{3} \frac{x}{3} \frac{x}{3} (2-x) \leq \left[\frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + (2-x) \right\} \right]^4 \leq \frac{1}{2^4}$, chỉ bằng khi

$\frac{x}{3} = \frac{x}{3} = \frac{x}{3} = (2-x) \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Ví dụ 2: Tương tự tìm cực trị hàm $z = xy$,

điều kiện: $\varphi(x,y) = 3x + 2y - 5 = 0$

+ Đặt $L = z + \lambda \cdot \varphi = xy + \lambda \cdot (3x + 2y - 5)$



$$+ \text{ Giải hệ: } \begin{cases} y + 3\lambda = 0 \\ x + 2\lambda = 0 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-5}{12}, \quad x = \frac{5}{6}, \quad y = \frac{5}{4}$$

Ta tính vi phân bậc 2: $d^2L = L''_{x^2} dx^2 + 2L''_{xy} dx dy + L''_{y^2} dy^2$,

Ta có: $L''_{x^2} = 0 = L''_{y^2}$, $L''_{xy} = 1$ và $3dx + 2dy = 0$

$$\Rightarrow d^2L = -3dx^2 < 0$$

\Rightarrow hàm số đạt cực đại tại $M(\frac{5}{6}, \frac{5}{4})$. $Z_{CD} = \frac{25}{24}$

Thực ra điểm $M(\frac{5}{6}, \frac{5}{4})$ là điểm đặc biệt vì: $L''_{x^2} = L''_{y^2} = 0$

Ý nghĩa hình học: M là trung điểm của AB . Đó chính là diện tích lớn nhất nội tiếp trong tam giác vuông OAB .

Cách khác: $z = x\left(\frac{5-3x}{2}\right) \Rightarrow z'_x = \frac{1}{2}(-6x+5)$, $z''_{xx} = -3 < 0 \Rightarrow$ CD

Ví dụ 3: Lấy ví dụ trước: Tìm cực trị hàm $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, điều kiện: $\varphi(x,y) = x+y-1=0$

+ Đặt $L = z + \lambda \cdot \varphi = \sqrt{1-x^2-y^2} + \lambda \cdot (x+y-1)$

$$+ \text{ Giải hệ: } \begin{cases} L'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = x+y-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists! M(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\text{Tại } M: \begin{cases} L''_{x^2} = z''_{xx} = \frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}} \\ L''_{y^2} = z''_{yy} = \frac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}} \\ L''_{xy} = z''_{xy} = \frac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ta tính vi phân bậc 2 tại M :

$$d^2L = L''_{x^2} dx^2 + 2L''_{xy} dx dy + L''_{y^2} dy^2,$$

$$\Rightarrow d^2L = -\frac{3}{\sqrt{2}} dx^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} dy^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} dx dy = -\frac{3}{\sqrt{2}} \left(dy + \frac{dx}{3} \right)^2 - \frac{8}{3\sqrt{2}} dx^2 < 0$$

\Rightarrow hàm số đạt cực đại tại $M(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2})$

BÀI 3: TỔNG QUÁT VỀ CỰC TRỊ

3.1 Cực trị tự do hàm nhiều biến

Riêng phần này, sinh viên sẽ hiểu thấu đáo hơn khi đã học dạng toàn phương ở học phần sau.

Định lý về điều kiện cần của cực trị địa phương tổng quát:

Định lý về điều kiện cần về hàm nhiều biến tổng quát vẫn tương tự cho trường hợp 2 biến đã khảo sát ở trên. Nghĩa là X_0 là cực trị thì X_0 là điểm dừng, tức các đạo hàm riêng tại X_0 triệt tiêu.

Định lý về điều kiện đủ của cực trị địa phương tổng quát.

$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n): R^n \rightarrow R$, giả sử f có các đạo hàm riêng cấp 2 tồn tại và liên tục trong lân cận của điểm dừng $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

Xét dạng toàn phương **không suy biến** (định thức ma trận DTP khác 0)

$$d^2f(X_0) = \sum_{i,j=1}^n \left(f''_{x_i x_j} \Big|_{X_0} \right) dx_i dx_j \text{ tại } X_0, \text{ có 3 trường hợp:}$$

a/ Là xác định dương ($d^2f(X_0) > 0$) thì f đạt cực tiểu tại X_0

b/ Là xác định âm ($d^2f(X_0) < 0$) thì f đạt cực đại tại X_0

c/ ($d^2f(X_0) = 0$) thì tại X_0 chưa có kết luận. Phải xét vi phân cấp 3...

Ví dụ 1: Lấy ví dụ trước: Tìm cực trị hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Ta đã tìm được duy nhất điểm dừng $O(0,0)$, ta tính tiếp các đạo hàm bậc 2 tại $M_0(0,0)$ ta được.

$$z''_{xx} = \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad z''_{yy} = \frac{x^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad z''_{xy} = \frac{-xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

Tại $M_0(0,0)$ ta xét vi phân bậc 2:

$$d^2z(M_0) = z''_{x^2} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{y^2} dy^2 = -(dx^2 + dy^2) < 0$$

ta kết luận $M_0(0,0)$ là điểm cực đại.

Ví dụ 2: Khảo sát cực trị của hàm $z = x^3 + y^3 - 3xy$ tại $M_1(1,1)$

• Ta có: $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$

• Tại $M_1(1,1)$ ta xét vi phân bậc 2:

$$\begin{aligned} d^2z(M_1) &= z''_{x^2} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{y^2} dy^2 = 6(dx^2 - dx dy + dy^2) = \\ &= 6 \left[\left(dx - \frac{dy}{2} \right)^2 + \frac{3dy^2}{4} \right] > 0, \text{ nên } M_1(1,1) \text{ là điểm cực tiểu.} \end{aligned}$$

Khai triển cụ thể của định lý về điều kiện đủ.

$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Giả sử $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ tồn tại và liên tục tại **điểm dừng** $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$,

đặt $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) = f''_{x_i x_j} \Big|_{X_0}$, và định nghĩa:

Định thức: $H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \vdots & a_{kk} \end{vmatrix}; k = \overline{1, n}$, lúc đó ta có:

- 1/ Nếu $H_k > 0$ (**dương cả**) $\forall k = \overline{1, n} \Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại X_0 .
- 2/ Nếu $(-1)^k \cdot H_k > 0$ (**đơn dấu**) $\forall k = \overline{1, n} \Rightarrow f$ đạt cực đại tại X_0 .
- 3/ Nếu $\exists k \in \{1, 2, 3, \dots, n-2\}$ sao cho $H_k \cdot H_{k-2} < 0 \Rightarrow f$ không đạt cực trị tại X_0 .
- 4/ Nếu $\exists k$ sao cho $H_{2k} < 0 \Rightarrow f$ không đạt cực trị tại X_0 .

Chú ý:

- Các bất đẳng thức là nghiêm cách, không thể bằng 0.
- Định lý này chỉ có một chiều, nghĩa là có thể f đạt cực tiểu tại X_0 nhưng không có $H_k > 0$ (**không dương cả**) $\forall k = \overline{1, n}$ tại X_0

Ví dụ 1: Với $n=2$, ta thấy lại kết quả trước đây về cực trị tự do:

- 1/ Nếu $H_k > 0$ (**dương cả**) $\forall k = \overline{1, 2} \Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại X_0 .

Nghĩa là: $H_1 = f''_{xx} > 0$, $H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0$

- 2/ Nếu $(-1)^k \cdot H_k > 0$ (**đơn dấu**) $\forall k = \overline{1, 2} \Rightarrow f$ đạt cực đại tại X_0 .

Nghiã là: $H_1 = f''_{xx} < 0, H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0$

Ví dụ 2: Với $n=3$, ta phân tích:

- + $H_1, H_2, H_3 > 0$ (**dương cả**) \Rightarrow f đạt cực tiểu tại X_0 .
- + $H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0$ (**đơn dấu**) \Rightarrow f đạt cực đại tại X_0 .
- + $H_2 < 0$ \Rightarrow f không đạt cực trị tại X_0 .
- + $H_1 \cdot H_3 < 0$ \Rightarrow f không đạt cực trị tại X_0 .

Nghiã là có hai trường hợp sau:

- $H_1 < 0, H_3 > 0$ \Rightarrow f không đạt cực trị tại X_0 .
- $H_1 > 0, H_3 < 0$ \Rightarrow f không đạt cực trị tại X_0 .

• **Cực tiểu: (dương cả)**

$$H_1 = f''_{xx} > 0, H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0, H_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} > 0$$

• **Cực đại: (đơn dấu, bắt đầu từ âm)**

$$H_1 = f''_{xx} < 0, H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0, H_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} < 0$$

3.2 Cực trị vướng (có điều kiện) hàm nhiều biến:

Hàm $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, thỏa điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots = 0 \\ g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, m < n \text{ (nhỏ hẳn)}$$

+ **Cách 1:** Giả sử ta giải được:
$$\begin{cases} x_1 = h_1(x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \dots, x_n) \\ x_2 = h_2(x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ x_m = h_m(x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \dots, x_n) \end{cases}$$

lúc đó hàm z trở thành $z=f(x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \dots, x_n)$ có $n-m$ biến độc lập và ta có thể tìm cực trị tự do như phần trên đã nói.

+ **Cách 2:**

Đặt $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(X) + \sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j g_j(X)$,

$\phi(X)$ gọi là hàm Lagrange.

Định lý cần: Giả sử $f, g_1, g_2, g_3, \dots, g_m$, có đạo hàm riêng tại X_0 , và f đạt cực trị tại X_0 , thì

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m \text{ sao cho: } \frac{\partial \phi(X_0)}{\partial \lambda_j} = g_j(X_0) = 0 \text{ và} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = 0, \forall k = \overline{1, n} \end{array} \right\} (*)$$

Nghĩa là X_0 là **điểm dừng**. Vậy để tìm tập điểm dừng:

Ta giải hệ 2 phương trình của (*). Nếu bộ $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ là nghiệm của hệ (*) thì $X_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$ gọi là **điểm dừng** và bộ $(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ gọi là **nhân tử Lagrange**.

Định lý đủ: Giả sử X_0 là điểm dừng và $f, g_1, g_2, g_3, \dots, g_m$, có đạo hàm riêng tại X_0 , và $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$ liên tục tại X_0 ứng với bộ $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)$

và một số điều kiện cụ thể sau đây, thì f đạt cực trị. Cụ thể:

Nếu đặt: $a_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(X_0, \lambda_0)$, $b_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \phi''_{\lambda_i x_j}(X_0)$,

Ta luôn có: $\phi''_{\lambda_i \lambda_j} = 0$, đặc biệt $m=1$ thì $\phi''_{\lambda \lambda} = 0$

Xét định thức khối: gồm 2 khối lệch bên là chữ nhật,

$$H_k = \begin{array}{|ccc|cccc} \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \vdots & b_{1k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \vdots & b_{2k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \vdots & b_{mk} \\ \hline b_{11} & b_{21} & b_{m1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{1k} \\ b_{12} & b_{22} & b_{m2} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{2k} \\ b_{13} & \vdots & b_{m3} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1k} & b_{2k} & b_{mk} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \vdots & a_{kk} \\ \hline \end{array}$$

Hai khối lặc này là chuyển vị của nhau. Còn 2 khối trên đường chéo chính là vuông, chéo chính ở trên bằng 0.

Ta xét các định thức:

1/ Nếu $(-1)^m \cdot H_k > 0 \quad \forall k = \overline{m+1, n} \Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại X_0 .

2/ Nếu $(-1)^k \cdot H_k > 0 \quad \forall k = \overline{m+1, n} \Rightarrow f$ đạt cực đại tại X_0 .

Chú ý:

- Các bất đẳng thức là nghiêm cách, không thể bằng 0.
- Định lý này chỉ có một chiều, nghĩa là có thể f đạt cực tiểu tại X_0 **nhưng không có** $(-1)^m \cdot H_k > 0 \quad \forall k = \overline{m+1, n}$ tại X_0
- Khi $m=1$ ta có: $\phi''_{\lambda\lambda} = 0$

Phân tích định lý: Dạng các định thức H_i như sau:

Ví dụ 1: Với $n=4, m=1$, ta có: $\forall k = \overline{m+1, n} = \overline{2, 4}$, xét 3 định thức:

i/ $H_2 < 0, H_3 < 0, H_4 < 0 \Rightarrow$ thì f đạt cực tiểu. Vì $m=1, (-1)^m = -1 < 0$.

ii/ $H_2 > 0, H_3 < 0, H_4 > 0 \Rightarrow$ thì f đạt cực đại.

Ví dụ 2: Với $n=3, m=1$, ta có: $\forall k = \overline{m+1, n} = \overline{2, 3}$, xét 2 định thức:

i/ $H_2 < 0, H_3 < 0 \Rightarrow$ thì f đạt cực tiểu. Vì $m=1, (-1)^m = -1 < 0$.

ii/ $H_2 > 0, H_3 < 0 \Rightarrow$ thì f đạt cực đại.

Ví dụ 3: Trường hợp này ta **thường gặp (Cực trị hàm 2 biến)**.

Với $n=2, m=1$, ta có: $\forall k = \overline{m+1, n} = \overline{2, 2}$, chỉ xét 1 định thức:

i/ $H_2 < 0 \Rightarrow$ thì f đạt cực tiểu. Vì $m=1, (-1)^m = -1 < 0$.

ii/ $H_2 > 0 \Rightarrow$ thì f đạt cực đại.

$$\text{Trong đó: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi''_{\lambda\lambda} & \phi''_{\lambda x_1} & \phi''_{\lambda x_2} \\ \phi''_{\lambda x_1} & \phi''_{x_1 x_1} & \phi''_{x_1 x_2} \\ \phi''_{\lambda x_2} & \phi''_{x_2 x_1} & \phi''_{x_2 x_2} \end{vmatrix}$$

$$\text{Có thể chứng minh: } H_2 = \begin{vmatrix} \phi''_{\lambda\lambda} & \phi''_{\lambda x_1} & \phi''_{\lambda x_2} \\ \phi''_{\lambda x_1} & \phi''_{x_1 x_1} & \phi''_{x_1 x_2} \\ \phi''_{\lambda x_2} & \phi''_{x_2 x_1} & \phi''_{x_2 x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi''_{x_1 x_1} & \phi''_{x_1 x_2} & \phi''_{x_1 \lambda} \\ \phi''_{x_2 x_1} & \phi''_{x_2 x_2} & \phi''_{x_2 \lambda} \\ \phi''_{\lambda x_1} & \phi''_{\lambda x_2} & \phi''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

Bằng cách đổi liên tiếp 2 lần hàng 1-->hàng 3, sau đó lại đổi liên tiếp 2 lần cột 1-->cột 3, thì định thức không thay đổi dấu. Vì mỗi lần hoán vị 2

dòng (cột) thì định thức đổi dấu, và như vậy đổi dấu 2 lần thì định thức hoàn lại dấu cộng. Một vài sách khác dùng ở dạng thứ hai.

• Ta xét các dạng khác:

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi''_{\lambda\lambda} & \phi''_{\lambda x_1} & \phi''_{\lambda x_2} & \phi''_{\lambda x_3} \\ \phi''_{\lambda x_1} & \phi''_{x_1 x_1} & \phi''_{x_1 x_2} & \phi''_{x_1 x_3} \\ \phi''_{\lambda x_2} & \phi''_{x_2 x_1} & \phi''_{x_2 x_2} & \phi''_{x_2 x_3} \\ \phi''_{\lambda x_3} & \phi''_{x_3 x_1} & \phi''_{x_3 x_2} & \phi''_{x_3 x_3} \end{vmatrix}$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial g}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \frac{\partial g}{\partial x_4} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi''_{\lambda\lambda} & \phi''_{\lambda x_1} & \phi''_{\lambda x_2} & \phi''_{\lambda x_3} & \phi''_{\lambda x_4} \\ \phi''_{\lambda x_1} & \phi''_{x_1 x_1} & \phi''_{x_1 x_2} & \phi''_{x_1 x_3} & \phi''_{x_1 x_4} \\ \phi''_{\lambda x_2} & \phi''_{x_2 x_1} & \phi''_{x_2 x_2} & \phi''_{x_2 x_3} & \phi''_{x_2 x_4} \\ \phi''_{\lambda x_3} & \phi''_{x_3 x_1} & \phi''_{x_3 x_2} & \phi''_{x_3 x_3} & \phi''_{x_3 x_4} \\ \phi''_{\lambda x_4} & \phi''_{x_4 x_1} & \phi''_{x_4 x_2} & \phi''_{x_4 x_3} & \phi''_{x_4 x_4} \end{vmatrix}$$

Ví dụ 4: Với $n=4, m=2$, ta có: $\forall k = \overline{m+1, n} = \overline{3, 4}$,

$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) = f(X) + \lambda_1 g_1(X) + \lambda_2 g_2(X)$, xét 2 định thức:

i/ $H_3 > 0, H_4 > 0 \Rightarrow$ thì f đạt cực tiểu. Vì $m=2, (-1)^m = 1 > 0$.

ii/ $H_3 < 0, H_4 > 0 \Rightarrow$ thì f đạt cực đại.

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \phi''_{\lambda_1 x_1} & \phi''_{\lambda_1 x_2} & \phi''_{\lambda_1 x_3} \\ 0 & 0 & \phi''_{\lambda_2 x_1} & \phi''_{\lambda_2 x_2} & \phi''_{\lambda_2 x_3} \\ \phi''_{\lambda_1 x_1} & \phi''_{\lambda_2 x_1} & \phi''_{x_1 x_1} & \phi''_{x_1 x_2} & \phi''_{x_1 x_3} \\ \phi''_{\lambda_1 x_2} & \phi''_{\lambda_2 x_2} & \phi''_{x_2 x_1} & \phi''_{x_2 x_2} & \phi''_{x_2 x_3} \\ \phi''_{\lambda_1 x_3} & \phi''_{\lambda_2 x_3} & \phi''_{x_3 x_1} & \phi''_{x_3 x_2} & \phi''_{x_3 x_3} \end{vmatrix}$$

$$H_4 = \begin{array}{|cc|cc|cc|} \hline \phi''_{\lambda_1 \lambda_1} = 0 & \phi''_{\lambda_1 \lambda_2} = 0 & \phi''_{\lambda_1 x_1} & \phi''_{\lambda_1 x_2} & \phi''_{\lambda_1 x_3} & \phi''_{\lambda_1 x_4} \\ \phi''_{\lambda_2 \lambda_1} = 0 & \phi''_{\lambda_2 \lambda_2} = 0 & \phi''_{\lambda_2 x_1} & \phi''_{\lambda_2 x_2} & \phi''_{\lambda_2 x_3} & \phi''_{\lambda_2 x_4} \\ \hline \phi''_{\lambda_1 x_1} & \phi''_{\lambda_2 x_1} & \phi''_{x_1 x_1} & \phi''_{x_1 x_2} & \phi''_{x_1 x_3} & \phi''_{x_1 x_4} \\ \phi''_{\lambda_1 x_2} & \phi''_{\lambda_2 x_2} & \phi''_{x_2 x_1} & \phi''_{x_2 x_2} & \phi''_{x_2 x_3} & \phi''_{x_2 x_4} \\ \phi''_{\lambda_1 x_3} & \phi''_{\lambda_2 x_3} & \phi''_{x_3 x_1} & \phi''_{x_3 x_2} & \phi''_{x_3 x_3} & \phi''_{x_3 x_4} \\ \phi''_{\lambda_1 x_4} & \phi''_{\lambda_2 x_4} & \phi''_{x_4 x_1} & \phi''_{x_4 x_2} & \phi''_{x_4 x_3} & \phi''_{x_4 x_4} \\ \hline \end{array}$$

Chú ý: Ở định lý điều kiện đủ tổng quát trong trường hợp: Nếu các $\phi''_{x_i x_i} = \phi''_{x_i^2} = 0, \forall i$, thì ta phải khử dạng vi phân chưa độc lập bằng hệ thức vi phân $dg = 0$, lúc đó ta mới có dạng vi phân bậc 2 cho các biến độc lập. Và ta khảo sát dấu trên dạng vi phân này, để xác định điểm cực trị.

3.3 Các ví dụ:

Ví dụ 1:

Tìm các điểm tới hạn của: $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, x > 0, y > 0, z > 0$.

Dùng điều kiện cấp 2 của đạo hàm để phân biệt điểm Max và Min.

Giải: Giải 3 phương trình: $f'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, f'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0;$

$f'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left\{ y = \pm 2x, z^2 = \frac{y^3}{2x} = 2yx \right\}$, vậy y, x, z cùng dấu.

tìm được đúng 2 nghiệm dừng: $M(1/2, 1, 1)$ và $N(-1/2, -1, -1)$. Tính:

$$f''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3} \qquad f''_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} \qquad f''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}$$

$$f''_{xy} = -\frac{y}{2x^2}, \qquad f''_{xz} = 0 \qquad f''_{yz} = \frac{-2z}{y^2}$$

+ Bây giờ xét nghiệm tại $M(1/2, 1, 1)$:

Xét vi phân bậc 2:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + f''_{zz} dz^2 + 2(f''_{xy} dx dy + f''_{xz} dx dz + f''_{yz} dy dz)$$

là một dạng toàn phương theo dx, dy . Ta có ma trận:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = H_3 = 32 > 0, H_1 = 4 > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

$d^2f(M) > 0$ (DTP xác định dương) $\forall dx, dy \Rightarrow M(1/2, 1, 1)$ cực tiểu.

+ Bây giờ xét nghiệm tại $N(-1/2, -1, -1)$

$$H_1 = -4 < 0, H_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = H_3 = -32 < 0,$$

Vậy $d^2f(N) < 0$ (DTP xác định âm) $\forall dx, dy$

$\Rightarrow N(-1/2, -1, -1)$ cực đại.

Cách 2:

- Xét nghiệm tại $M(1/2, 1, 1)$:

Ta tính trực tiếp từ vi phân bậc 2:

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2(f''_{xy}dxdy + f''_{xz}dxdz + f''_{yz}dydz)$$

là: $d^2f = 4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy - 4dydz$, sau một số tính toán :

$$d^2f = 4\left(dx - \frac{dy}{2}\right)^2 + 2(dy - dz)^2 + 4dz^2 > 0 \implies M(1/2, 1, 1) \text{ CT}$$

- Xét nghiệm tại $N(-1/2, -1, -1)$:

Ta tính trực tiếp từ vi phân bậc 2:

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2(f''_{xy}dxdy + f''_{xz}dxdz + f''_{yz}dydz)$$

là: $d^2f = -4dx^2 - 3dy^2 - 6dz^2 + 4dxdy + 4dydz$, sau một số tính toán :

$$d^2f = -4\left(dx - \frac{dy}{2}\right)^2 - 2(dy - dz)^2 - 4dz^2 < 0 \implies N(-1/2, -1, -1) \text{ CD}$$

Ví dụ 2: Xét lại ví dụ trước đây: Hàm: $z=f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

- Tìm tập các điểm dừng:

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 0$$

$$z'_y = 3y^2 - 3x = 0$$

Giải hệ này ta có 2 điểm dừng là $M_1(1,1)$ và $M_2(0,0)$

- Ta có: $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$

Và vi phân cấp 2: $d^2 f = f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + 2f''_{xy}dxdy$

♣ Tại M_1 : $d^2 f = 6dx^2 + 6dy^2 - 6dxdy = 6\left(dy - \frac{dx}{2}\right)^2 + \frac{9dx^2}{2} > 0$,

nên M_1 là điểm cực tiểu.

Có thể thấy bằng $H_1 = 6 > 0$, $H_2 = 36 - 9 > 0$

- ♣ Tại M_2 : $d^2 f = -3dxdy = ?$ có thể âm, có thể dương,

nên M_2 không là điểm cực trị. Có thể thấy bằng $H_2 = -9 < 0$

Ví dụ 3:

Tìm các điểm cực trị của: $f(x, y, z) = x + \frac{2y}{x} + \frac{z}{2y} + \frac{1}{z}$,

Giải: $D = R^3 - \{(0,0,0)\}$. Giải 3 phương trình: $f'_x = 1 - \frac{2y}{x^2} = 0$;

$$f'_y = \frac{2}{x} - \frac{z}{2y^2} = 0; \quad f'_z = \frac{1}{2y} - \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left\{ x^2 = 2y, 4y^2 = xz, z^2 = 2y \right\},$$

Vậy $y > 0$, x và z bằng nhau và cùng dấu. Giải ra:

Tìm được đúng 2 nghiệm dừng: $M(1, 1/2, 1)$ và $N(-1, 1/2, -1)$.

Tính: $f''_{xx} = \frac{4y}{x^3}$ $f''_{yy} = \frac{z}{y^3}$ $f''_{zz} = \frac{2}{z^3}$
 $f''_{xy} = -\frac{2}{x^2}$, $f''_{xz} = 0$ $f''_{yz} = \frac{-1}{2y^2}$

+ Bây giờ xét nghiệm tại $M(1/2, 1, 1)$:

Xét vi phân bậc 2:

$$d^2 f = f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2\left(f''_{xy}dxdy + f''_{xz}dxdz + f''_{yz}dydz\right)$$

là một dạng toàn phương theo dx, dy, dz . Ta có định thức ma trận Hess:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = H_3 = 16 > 0, H_1 = 2 > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$d^2f(M) > 0$ (DTP xác định dương) $\forall dx, dy, dz \Rightarrow M(1, 1/2, 1)$ cực tiểu.

Cách khác: $d^2 f = 2dx^2 + 8dy^2 + 2dz^2 - 4dxdy - 4dydz =$
 $= 2(dx - dy)^2 + 4dy^2 + 2(dz - dy)^2 > 0 \Rightarrow M(1, 1/2, 1)$ cực tiểu.

+ Bây giờ xét nghiệm tại $N(-1, 1/2, -1)$

$$H_1 = -2 < 0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = H_3 = -16 < 0,$$

Vậy $d^2 f(N) < 0$ (DTP xác định âm) $\forall dx, dy, dz$

$\Rightarrow N(-1, -1/2, -1)$ cực đại.

Cách khác: $d^2 f = -2dx^2 - 8dy^2 - 2dz^2 - 4dxdy - 4dydz =$
 $= -2(dx + dy)^2 - 4dy^2 - 2(dz + dy)^2 < 0 \Rightarrow N(-1, -1/2, -1)$ cực đại.

Ví dụ 4: Với $n=4, m=1$, tìm cực trị của $f(x,y,z,t)=x+y+z+t$.
 Với điều kiện: $g(x,y,z,t) = 81-xyzt=0$.

+ Cách 1:

Hàm f trở thành hàm $f(x,y,z)=x+y+z+\frac{81}{xyz}$, và có

$$f'_x = 1 - \frac{81}{x^2 y z}, \quad f'_y = 1 - \frac{81}{x y^2 z}, \quad f'_z = 1 - \frac{81}{x y z^2}$$

$$f''_{x^2} = \frac{162}{x^3 y z}, \quad f''_{y^2} = \frac{162}{x y^3 z}, \quad f''_{z^2} = \frac{162}{x y z^3},$$

$$f''_{xy} = \frac{81}{x^2 y^2 z}, \quad f''_{xz} = \frac{81}{x^2 y z^2}, \quad f''_{yz} = \frac{81}{x y^2 z^2}$$

Điểm dừng: $f'_x=0, f'_y=0, f'_z=0 \Leftrightarrow x^2 y z=81, x y^2 z=81, x y z^2=81$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^4 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow M_1(3,3,3), M_2(-3,-3,-3), \text{ là hai điểm dừng.}$$

• Xét tại $M_1(3,3,3)$:

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\frac{162}{81 \times 3} = \frac{2}{3}, \quad a_{12}=a_{21}=a_{13}=a_{31}=a_{23}=a_{32}=\frac{1}{3} \quad \text{Ta có:}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{27}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}, \quad H_1 = \frac{2}{3}$$

Ta có: H_1, H_2, H_3 đều dương f đạt cực tiểu tại $M_1(3,3,3)$,
 $t = \frac{81}{x y z} = 3$ Vậy f đạt cực tiểu tại $M_1(3,3,3)$.

Cách khác: Ta xét vi phân bậc 2 tại $M_1(3,3,3)$.

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + f''_{zz} dz^2 + 2(f''_{xy} dx dy + f''_{xz} dx dz + f''_{yz} dy dz)$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{2}{3} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2 \frac{1}{3} (dx dy + dx dz + dy dz) = \\ &= \frac{2}{3} \left(dz + \frac{dy}{2} + \frac{dx}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(dy + \frac{dx}{3} \right)^2 + \frac{4}{9} (dx)^2 > 0 \end{aligned}$$

Vậy f đạt cực tiểu tại $M_1(3,3,3)$.

• Xét tại $M_2(-3,-3,-3)$: $a_{11}=a_{22}=a_{33}=-\frac{2}{3}$, $a_{12}=a_{21}=a_{13}=a_{31}=a_{23}=a_{32}=-\frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có: } H_3 = -\frac{1}{27} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{27}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3},$$

$H_1 = -\frac{2}{3} < 0$, $H_1 < 0$, $H_2 > 0$, $H_3 < 0$, Vậy cực đại tại $M_2(-3,-3,-3)$.

Cách khác: Ta xét vi phân bậc 2 tại $M_2(-3,-3,-3)$.

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + f''_{zz} dz^2 + 2(f''_{xy} dx dy + f''_{xz} dx dz + f''_{yz} dy dz)$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= -\frac{2}{3} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2 \frac{1}{3} (dx dy + dx dz + dy dz) = \\ &= -\frac{2}{3} \left(dz + \frac{dy}{2} + \frac{dx}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(dy + \frac{dx}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} (dx)^2 < 0 \end{aligned}$$

Vậy cực đại tại $M_2(-3,-3,-3)$.

+ **Cách 2:** Đặt hàm $\phi(x,y,z,t,\lambda) = x+y+z+t+\lambda(81-xyzt)$, $n=4$, $m=1$.

điểm dừng là N^0 của hệ $\left\{ \phi'_x = 0, \phi'_y = 0, \phi'_z = 0, \phi'_t = 0, \phi'_\lambda = 0 \right\}$

$$\Leftrightarrow 1-\lambda yzt=0, 1-\lambda xzt=0, 1-\lambda xyt=0, 1-\lambda xyz=0, 81-xyzt=0$$

$$\Leftrightarrow M_1(3,3,3,3, \lambda = \frac{1}{27}), \quad M_2(-3,-3,-3,-3, \lambda = -\frac{1}{27}) \text{ là 2 điểm dừng.}$$

Tính: $g'_x = -yzt$, $g'_y = -xzt$, $g'_z = -xyt$, $g'_t = -xyz$,

$$\phi''_{x^2} = \phi''_{y^2} = \phi''_{z^2} = \phi''_{t^2} = 0,$$

$$\phi''_{xy} = -\lambda zt, \phi''_{xz} = -\lambda yt, \phi''_{xt} = -\lambda yz, \phi''_{yz} = -\lambda xt, \phi''_{yt} = -\lambda xz, \phi''_{zt} = -\lambda xy,$$

• Xét tại M_1 : $g'_x(M_1) = g'_y(M_1) = g'_z(M_1) = g'_t(M_1) = -27$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, \quad a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = -\frac{1}{27} \cdot 3 \cdot 3 = -\frac{1}{3}.$$

Rút -27 ở hàng 1, cột 1 ra ngoài ta có:

$$\begin{aligned} H_4 &= \begin{vmatrix} 0 & -27 & -27 & -27 & -27 \\ -27 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -27 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -27 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -27 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix} = (-27)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 3^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -3^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -3^6 \frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -3^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3^3 \cdot 4 < 0 \\ H_3 &= (-27)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix} = 3^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -3^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \\ &= -3^6 \frac{1}{3} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3^5 < 0 \end{aligned}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & -27 & -27 \\ -27 & 0 & \frac{-1}{3} \\ -27 & \frac{-1}{3} & 0 \end{vmatrix} = (-27)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 1 & \frac{-1}{3} & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3^6 < 0. \quad m=1$$

Ta có: $(-1)^m H_k = -H_k > 0, \forall k = \overline{2, 4}$, vậy f cực tiểu tại M_1 .

• Tương tự tại $M_2(-3, -3, -3, -3, \lambda = -\frac{1}{27})$:

$$H_4 = \begin{vmatrix} 0 & 27 & 27 & 27 & 27 \\ 27 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 27 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 27 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 27 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3^3, \quad H_2 = 2 \cdot 3^5,$$

$H_3 = -3^5 \Rightarrow (-1)^k H_k > 0, \forall k = \overline{2, 4}$, vậy f cực đại tại M_2 .

Cách khác: Nếu ta xét vi phân bậc 2, với 4 biến độc lập như sau:

$$d^2\phi = \phi''_{xx} dx^2 + \phi''_{yy} dy^2 + \phi''_{zz} dz^2 + \phi''_{tt} dt^2 + \\ + 2(\phi''_{xy} dx dy + \phi''_{xz} dx dz + \phi''_{xt} dx dt + \phi''_{yz} dy dz + \phi''_{yt} dy dt + \phi''_{zt} dz dt)$$

tại $M_1(3, 3, 3, 3, \lambda = -\frac{1}{27})$ và $M_2(-3, -3, -3, -3, \lambda = -\frac{1}{27})$. Thì gặp trở ngại vì

đạo hàm bậc 2 triệt tiêu: $\phi''_{x^2} = \phi''_{y^2} = \phi''_{z^2} = \phi''_{t^2} = 0$. Ta không đi sâu phần

này. Nhưng ta khảo sát cách khác như sau:

Ta có: $\phi(x, y, z, t) = 81 - xyzt = 0$,

$$d\phi = 0 \Leftrightarrow -(yztdx + xztdy + xytdz + xyzdt) = 0 \Leftrightarrow -27(dx + dy + dz + dt) = 0$$

$$d\phi = 0 \Leftrightarrow dt = -(dx + dy + dz) \quad (1)$$

• Xét tại $M_1(x=3, y=3, z=3, t=3, \lambda = \frac{1}{27})$:

Bây giờ dạng vi phân bậc 2, với 4 biến không độc lập ở trên. Ta khử tính chưa độc lập của chúng thành dạng vi phân bậc 2 bởi hệ thức (1), lúc đó ta có 3 biến độc lập x, y, z như sau:

$$d^2\phi = 0 dx^2 + 0 dy^2 + 0 dz^2 + 0 dt^2 + \\ + 2(\phi''_{xy} dx dy + \phi''_{xz} dx dz + \phi''_{xt} dx dt + \phi''_{yz} dy dz + \phi''_{yt} dy dt + \phi''_{zt} dz dt) \\ d^2\phi = -2 \times 27(dx dy + dx dz + dx dt + dy dz + dy dt + dz dt) \quad (2)$$

Vậy để xét dấu của $d^2\phi$ ta chỉ cần xét dấu của (bỏ qua hằng số)

$$d^2\phi = -(dxdy + dxdz + dydz + dt[dx + dy + dz]) \quad (3)$$

Thế (1) vào (3) ta có vi phân theo 3 biến độc lập:

$$d^2\phi = (dx^2 + dy^2 + dz^2 + dxdy + dxdz + dydz), \text{ hay viết lại dưới dạng:}$$

$$d^2\phi = \left(dz + \frac{dy}{2} + \frac{dx}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(dy + \frac{dx}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}dx^2 > 0, \text{ vậy } f \text{ cực tiểu tại } M_1$$

• Tương tự tại $M_2(-3, -3, -3, -3, \lambda = -\frac{1}{27})$. Ta có:

$$d^2\phi = 2 \times 27(dxdy + dxdz + dxdt + dydz + dydt + dzdt), \text{ và cuối cùng:}$$

$$d^2\phi = -\left(dz + \frac{dy}{2} + \frac{dx}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(dy + \frac{dx}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}dx^2 < 0, \text{ vậy } f \text{ cực đại tại } M_2.$$

Ví dụ 5: Tìm cực trị của $f(x, y, z, t) = 2x + y + 3z$.

Với điều kiện: $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 35 = 0$.

+ **Cách 1:**

$$\text{Hàm } L = f + \lambda g = 2x + y + 3z + \lambda(x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 35)$$

$$L'_x = 2 + 2\lambda x, \quad L'_y = 1 + 8\lambda y, \quad L'_z = 3 + 4\lambda z, \quad L'_\lambda = x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 35$$

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{yy} = 8\lambda, \quad L''_{zz} = 4\lambda, \quad L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = 0, \quad L''_{xz} = 0, \quad L''_{yz} = 0,$$

$$L''_{x\lambda} = 2x, \quad L''_{y\lambda} = 8y, \quad L''_{z\lambda} = 4z$$

$$\bar{\nabla}L = \bar{0} \Leftrightarrow M_1\left(4, \frac{1}{2}, 3, \lambda = \frac{-1}{4}\right), \quad M_2\left(-4, -\frac{1}{2}, -3, \lambda = \frac{1}{4}\right)$$

có hai điểm dừng. Xét vi phân bậc 2.

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2(L''_{xy}dxdy + L''_{xz}dxdz + L''_{yz}dydz)$$

là một dạng toàn phương theo 3 biến: dx, dy, dz . Chứng minh điều này tương tự như trường hợp 2 biến.

• Xét vi phân bậc 2 tại $M_1\left(4, \frac{1}{2}, 3, \lambda = \frac{-1}{4}\right)$

$$d^2L \Big|_{M_1} = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 = -\frac{1}{2}dx^2 - 2dy^2 - dz^2 < 0$$

Nên $M_1\left(4, \frac{1}{2}, 3, \lambda = \frac{-1}{4}\right)$ là CD.

- Xét vi phân bậc 2 tại $M_2 \left(-4, -\frac{1}{2}, -3, \lambda = \frac{1}{4} \right)$

$$d^2L \Big|_{M_2} = L''_{xx} dx^2 + L''_{yy} dy^2 + L''_{zz} dz^2 = \frac{1}{2} dx^2 + 2dy^2 + dz^2 > 0$$

Nên $M_2 \left(-4, -\frac{1}{2}, -3, \lambda = \frac{1}{4} \right)$ là CT.

+ Cách 2: Dùng định thức, xét 2 định thức ($n=3, m=1$).

Tại $M_1 \left(4, \frac{1}{2}, 3, \lambda = -\frac{1}{4} \right)$, $(-1)^k H_k > 0$, $k = \overline{m+1, n} = \overline{2, 3}$, thật vậy:

$$\text{Ta xét: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 8 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 136 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 & 12 \\ 8 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -280 < 0, \text{ Tại } M_1 \text{ CD.}$$

Tương tự tại $M_2 \left(-4, -\frac{1}{2}, -3, \lambda = \frac{1}{4} \right)$, CT. Thật vậy:

$$\text{Ta xét: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -8 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -136 < 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -4 & -12 \\ -8 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -280 < 0, \text{ tại } M_2 \text{ CT}$$

+ Cách 3: Dùng kiến thức bất đẳng thức BCS lớp 12.

$$\bar{a} = (x, 2y, z\sqrt{2}), \bar{b} = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\bar{a}\bar{b} = (2x + y + 3z) \leq |\bar{a}||\bar{b}| = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 2z^2} \left(4 + \frac{1}{4} + \frac{9}{2}\right), \text{ chỉ xảy ra dấu}$$

$$\text{bằng nếu: } \bar{a} // \bar{b} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{2y}{\frac{1}{2}} = \frac{z\sqrt{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 4y = \frac{2}{3}z = t,$$

$$\text{thế vào } x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 35 = 0 \Rightarrow t = \pm 2$$

$$t = 2 \Leftrightarrow M_1 \left(4, \frac{1}{2}, 3, \lambda = \frac{-1}{4}\right), \quad t = -2 \Leftrightarrow M_2 \left(-4, -\frac{1}{2}, -3, \lambda = \frac{1}{4}\right) \dots$$

Ví dụ 6: Lấy ví dụ trước $z = xy$, thỏa $\varphi(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$
 $L = z + \lambda \cdot \varphi = xy + \lambda [(x-1)^2 + y^2 - 1]$

Ta xét 2 điểm dừng $M_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda = \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M_2\left(\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$L''_{x^2} = 2\lambda = L''_{y^2}, \quad L''_{xy} = 1, \quad L''_{x\lambda} = 2(x-1), \quad L''_{y\lambda} = 2y$$

• Tại $M_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda = \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\text{Ta xét: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 6\sqrt{3} > 0, M_1 \text{ là CB}$$

Chú ý: Nếu ta đơn thuần chỉ xét cực trị qua ma trận Hess

$$H = \begin{bmatrix} L''_{x^2} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{y^2} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \text{ có dạng toàn phương}$$

$$d^2L = -\sqrt{3}dx^2 - \sqrt{3}dy^2 + 2dxdy + 2dxdz + 2\sqrt{3}dydz =$$

$$= -\sqrt{3}\left(x - \frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(z + 4y)^2 - 6\sqrt{3}y^2, \text{ đây không phải là}$$

dạng toàn phương xác định âm để suy ra M_1 là CD. Mà ta phải kết hợp với $\varphi(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$, để làm triệt tiêu $2dxdz + 2\sqrt{3}dydz = 0$

Lúc đó ta có: $d^2L = -\sqrt{3}dx^2 - \sqrt{3}dy^2 + 2dxdy \leq 0, \forall dx, dy \Rightarrow M_1$ là CD

• Tại $M_2\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\text{Ta xét: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -6\sqrt{3} > 0, M_2 \text{ là CT}$$

• Tại $M_0(0, 0, \lambda = 0)$

$$\text{Ta xét: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, M_0 \text{ là chưa có kết luận}$$

Ví dụ 7: Lấy ví dụ trước $z = xy$, thỏa $\varphi(x,y) = 3x+2y - 5 = 0$

$L = f + \lambda \cdot \varphi = xy + \lambda [3x+2y - 5]$

Có 1 điểm dừng duy nhất $M\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{4}, \lambda = \frac{-5}{12}\right)$.

$L''_{x^2} = 0 = L''_{y^2}, L''_{xy} = 1, L''_{x\lambda} = 3, L''_{y\lambda} = 2$. Tại $M\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{4}, \lambda = \frac{-5}{12}\right)$

$$\text{Ta xét: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0, M \text{ là CĐ}$$

Ví dụ 8: Lấy ví dụ trước: Tìm cực trị hàm $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$,

thỏa điều kiện: $\varphi(x,y) = x + y - 1 = 0$

+ Đặt $L = z + \lambda \cdot \varphi = \sqrt{1-x^2-y^2} + \lambda \cdot (x + y - 1)$

$$+ \text{ Giải hệ: } \begin{cases} L'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \lambda = 0 \Leftrightarrow \exists! M(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ L'_\lambda = x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Tại M: } \begin{cases} L''_{x^2} = \frac{y^2 - 1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}} \\ L''_{y^2} = \frac{x^2 - 1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}}, L''_{y\lambda} = \varphi'_y = 1, L''_{x\lambda} = \varphi'_x = 1 \\ L''_{xy} = \frac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Ta xét: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-3}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} > 0, M \text{ là CĐ}$$

\Rightarrow hàm số đạt cực đại tại $M(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2})$

Ví dụ 9: Tìm cực trị hàm $z(x,y) = 2(x^3 + y^3) - 3xy$,

thỏa điều kiện: $\varphi(x,y) = (x^2 + y^2) - 2 = 0$ Đây là ví dụ phức tạp!

Đầu tiên, chú ý hàm $z = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ là hàm có trục đối xứng là phân giác thứ nhất $y=x$, thực vậy: đổi về tọa độ cực ta có:

$z = 2(r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi) - \frac{3}{2}r^2 \sin 2\varphi$, giữ r cố định thay φ bằng $\frac{\pi}{2} - \varphi$ thì z không đổi. Và ta dự đoán có cực trị trên đường này!

+ Đặt $L = z + \lambda \cdot \varphi = 2(x^3 + y^3) - 3xy + \lambda \cdot (x^2 + y^2) - 2$

+ Giải hệ:
$$\begin{cases} L'_x = 6x^2 - 3y + \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 6y^2 - 3x + \lambda \cdot 2y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{có 4 điểm dừng.}$$

Thực vậy, từ hệ trên $\Rightarrow \frac{x}{2x^2 - y} = \frac{y}{2y^2 - x} = \frac{x - y}{2(x^2 - y^2) + (x - y)}$ (*)

• Nếu $x-y=0 \Rightarrow M_1(x=1, y=1, \lambda = -\frac{3}{2}), M_2(x=-1, y=-1, \lambda = \frac{9}{2})$

• Nếu $x-y \neq 0$ ta có thêm 2 điểm dừng nữa, thực vậy từ (*) ta suy ra $2x(x+y) + x = 2x^2 - y \Rightarrow x+y = -2xy \Rightarrow y = \frac{-x}{1+2x}$ thế vào

$x^2 + y^2 - 2 = 0$ ta có :

$4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x - 2 = 2(x+1)^2(2x^2 - 2x - 1) = 0$, dẫn đến:

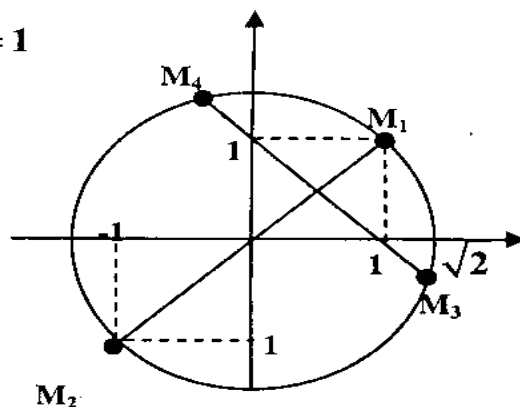
$M_3(x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \lambda = -\frac{9}{2}),$

$M_4(x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \lambda = -\frac{9}{2}),$ xem hình vẽ các điểm cực trị.

• Tại $M_1(x=1, y=1, \lambda = -\frac{3}{2})$: $z(M_1) = 1$

$$\begin{cases} L''_{x^2} = 12x + 2\lambda = 9 \\ L''_{y^2} = 12x + 2\lambda = 9 \\ L''_{xy} = -3 \end{cases}$$

, $L''_{y\lambda} = \varphi'_y = 2y = 2, L''_{x\lambda} = \varphi'_x = 2x = 2$



$$\text{Xét: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -96 < 0, M_1 \text{ CT địa phương}$$

- Tại $M_2(x = -1, y = -1, \lambda = \frac{9}{2})$: $z(M_2) = -7$

$$\begin{cases} L''_{x^2} = 12x + 2\lambda = -3 \\ L''_{y^2} = 12x + 2\lambda = -3, L''_{y\lambda} = \varphi'_y = 2y = -2, L''_{x\lambda} = \varphi'_x = 2x = -2 \\ L''_{xy} = -3 \end{cases}$$

$$\text{Ta xét: } H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

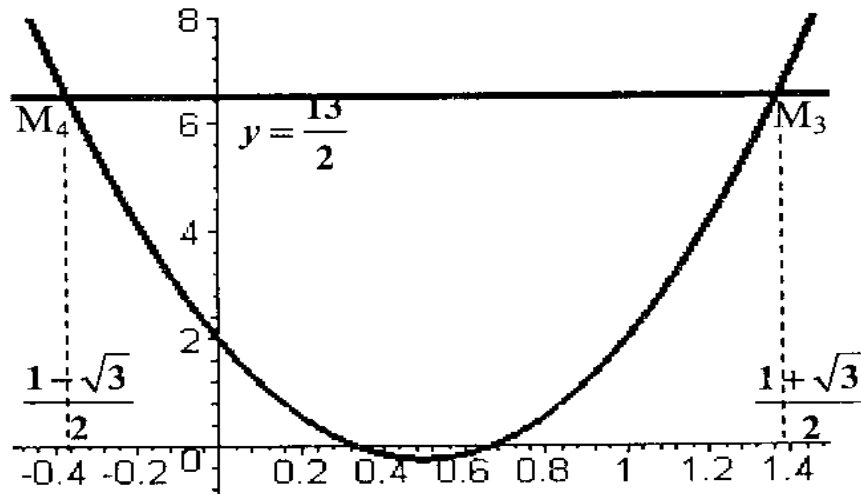
Nhưng M_2 vẫn là cực tiểu toàn cục (ta không đi sâu ở đây!)

- Tại M_3 , tính được $z(M_3) = z(M_4) = \frac{13}{2}$ là cực đại toàn cục ???

sinh viên khảo sát thêm. Ví dụ:

- Hàm $z(x, y)$ liên tục trên đường thẳng M_1OM_2 , cực đại tại M_1 , cực tiểu

tại M_2 , $z(M_0) = 0, z(x, y) = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 4x^3 - 3x^2$



• Hàm $z(x, y)$ liên tục trên đường thẳng M_3OM_4 , và có cực đại tại 2 điểm

M_4, M_3 , chúng cùng bằng $z(M_3) = z(M_4) = \frac{13}{2}$, thế $y = -x+1$ vào

$z(x, y) = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 9x^2 - 9x + 2$, ứng với $z = \frac{13}{2}$ thì cắt tại hai

hoành độ: $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ và $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ tương ứng với M_4, M_3 .

Cách khác: $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow xy = \frac{(x+y)^2 - 2}{2}$,

đặt $t = x + y \Rightarrow |t| = |x + y| \leq 2$

$z = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2(x+y)(2-xy) - 3xy = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$

ta khảo sát hàm $z(t)$ với $t \in [-2, 2]$

$z'_t = -3t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2$,

cuối cùng xét dấu ta có: $z(-2) = \min = -7, z(1) = \max = \frac{13}{2}$

Chú ý:

Phương pháp dùng định thức để xác định dấu của vi phân bậc 2 có dạng toàn phương không suy biến là chính xác, còn ta chỉ dùng dạng vi phân bậc 2 để tính toán nhanh. Trong trường hợp phương pháp dùng định thức không được (dạng toàn phương suy biến) thì dùng dạng vi phân bậc hai cũng sẽ suy biến và cũng không đạt được kết quả, lúc đó ta phải khảo sát trực tiếp định nghĩa hàm. Thậm chí đôi khi dạng vi phân bậc 2 toàn phương là suy biến nghĩa là $|H| = 0$, nhưng điểm dừng vẫn là điểm cực trị, ta sẽ có ví dụ cụ thể ở các bài toán kinh tế.

Ví dụ 1: Giả sử tại một điểm dừng nào đó, ta cần xác định dấu của

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2(L''_{xy}dxdy + L''_{xz}dxdz + L''_{yz}dydz) =$$

$= dx^2 + 29dy^2 + 10dz^2 + 4dxdy + 6dxdz + 2dydz$, nếu dùng ma trận Hess:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 29 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 0, \text{ phá sản! không có kết luận.}$$

Trong khi $d^2L = 10\left(dz + \frac{dy}{10} + \frac{3dx}{10}\right)^2 + \frac{289}{10}\left(dy + \frac{dx}{17}\right)^2 > 0$ (*)

Ta vội kết luận điểm dừng đang xét là cực tiểu, vậy là mắc sai lầm. Thật ra dạng (*) là dạng toàn phương bậc 3 suy biến về bậc 2, nên ta cũng không kết luận được gì!

Ví dụ 2: Tìm cực trị hàm: $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$

$$f'_x = 4x^3 - 2(x + y) = 0, \quad f'_y = 4y^3 - 2(x + y) = 0$$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f''_{yy} = 12y^2 - 2, \quad f''_{xy} = -2$$

Ta tìm được 3 điểm dừng $M_1(-1, -1)$, $M_2(1, 1)$, $M_3(0, 0)$,

Tại 2 điểm dừng $M_1(-1, -1)$, $M_2(1, 1)$,

$$\begin{aligned} d^2 f \Big|_{M_1} &= f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + 2f''_{xy} dx dy = 10dx^2 + 10dy^2 - 4dx dy = \\ &= 10 \left(dy - \frac{dx}{5} \right)^2 + \frac{48}{5} dx^2 > 0, \text{ vậy } M_1(-1, -1), M_2(1, 1) \text{ là CT.} \end{aligned}$$

Tại điểm dừng $M_3(0, 0)$,

$$d^2 f \Big|_{M_3} = -2dx^2 - 2dy^2 - 4dx dy = -2(dx + dy)^2 < 0 \text{ nhưng đây là dạng}$$

toàn phương suy biến, nên ta không kết luận được gì. Thật ra điểm $M_3(0, 0)$ không là cực trị. Thật vậy, ta có:

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^4 - (x + y)^2, \text{ ở lân cận điểm } (0, 0), \text{ ta lấy}$$

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \Rightarrow f(x_n, y_n) < 0, \text{ và lấy: } (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow f(x_n, y_n) > 0.$$

BÀI 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG KINH TẾ

4.1 Bài toán cho xí nghiệp sản xuất nhiều sản phẩm trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo:

Xét một xí nghiệp sản xuất $n=2$ loại sản phẩm trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo (nhà sản xuất phải bán sản phẩm với giá do thị trường quyết định). Biết giá (Price) của các sản phẩm trên là $P_1; P_2$ và hàm tổng chi phí (Cost) xét trong một đơn vị thời gian là $C = C(Q_1, Q_2)$, là hàm tính theo năng lượng tiêu hao, trên hai mức sản lượng (Quantity) Q_1, Q_2 . Nên nó phải là bậc 2 tương hỗ của Q_1, Q_2 . Tổng quát hàm chi phí là hàm:

$$C(Q) = C(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = Q^T A Q + B Q + C, \text{ trong đó:}$$

$B, Q^T = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n] \in M_{1 \times n}$, $A \in M_{n \times n}$, $C \in R$, gồm các yếu tố chi phí liên quan đến năng lượng thì thuộc dạng toàn phương $Q^T A Q$, ngoài ra còn có các yếu tố chỉ tỉ lệ tuyến tính BQ theo sản lượng, và thêm hằng số C là chi phí ban đầu bỏ ra. Và như vậy chi phí là một loại quadric tổng quát trong R^n

Bài toán là tìm mức sản lượng Q_1, Q_2 của các loại sản phẩm trên trong một đơn vị thời gian để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.

Giả sử Q_1, Q_2 là sản lượng của các loại sản phẩm được sản xuất trong một đơn vị thời gian. Khi đó doanh thu (Revenue) sẽ là:

$$R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2.$$

Lợi nhuận (Profit) thu được: $\pi = R - C$.

$$\pi = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - C(Q_1, Q_2).$$

Mức sản lượng phải tìm là giá trị Q_1, Q_2 dương để làm π đạt cực đại.

Ví dụ: Giả sử một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm với giá

$P_1 = 10; P_2 = 10$. Hàm tổng chi phí

$$C = C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1 Q_2 + 2Q_2^2.$$

Tìm mức sản lượng Q_1, Q_2 để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.

Doanh thu của xí nghiệp là: $R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 10Q_1 + 10Q_2$.

Lợi nhuận của xí nghiệp: $\pi = R - C =$

$$\pi = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1 Q_2 - 2Q_2^2.$$

Vậy $\pi = 10Q_1 + 10Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1 Q_2 - 2Q_2^2$.

Ta tìm cực trị của π .

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 - 4Q_1 - Q_2 = 0 \\ P_2 - 4Q_2 - Q_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4Q_1 + Q_2 = P_1 \\ Q_1 + 4Q_2 = P_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Q_1 = \frac{4P_1 - P_2}{15} = 2; Q_2 = \frac{4P_2 - P_1}{15} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 Q_1} = -4; \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -1; \frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 Q_2} = -4,$$

Vậy ta có $A = -4 < 0$ và $\Delta = AC - B^2 = 16 - 1 = 15 > 0$.

Suy ra π đạt cực đại tại điểm $Q_1 = 2, Q_2 = 2$. Vậy mức sản lượng mà xí nghiệp sản xuất để có lợi nhuận tối đa là $Q_1 = 2$ và $Q_2 = 2$.

Cách khác: Tính vi phân bậc 2: $d^2 \pi = -4dQ_1^2 - 4dQ_2^2 + 2(-1)dQ_1 dQ_2 =$

$$= -4 \left(dQ_1 + \frac{dQ_2}{4} \right)^2 - \frac{15}{4} dQ_2^2 < 0 \implies (Q_1 = 2 \text{ và } Q_2 = 2) \text{ CD.}$$

4.2 Bài toán cho xí nghiệp sản xuất độc quyền nhiều sản phẩm trong điều kiện sản xuất độc quyền.

Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền $n=2$ loại sản phẩm. Biết hàm cầu của xí nghiệp về 2 loại sản phẩm trên một đơn vị thời gian là:

$$Q_{D1} = D_1(p_1, p_2)$$

$$Q_{D2} = D_2(p_1, p_2) \quad (p_1, p_2 \text{ là giá bán})$$

Thông thường $i = 1, 2, p_i \uparrow \implies Q_{D_i} \downarrow$ hay ngược lại.

Và hàm tổng chi phí của xí nghiệp: $C = C(Q_1, Q_2)$

Tìm mức sản lượng Q_1, Q_2 để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.

Giả sử Q_1, Q_2 là sản lượng của các loại sản phẩm mà xí nghiệp sản xuất trong một đơn vị thời gian. Để bán hết các loại sản phẩm trên xí nghiệp phải bán với giá p_1, p_2 sao cho:

$$Q_{D1} = Q_1 = D_1(p_1, p_2)$$

$$Q_{D2} = Q_2 = D_2(p_1, p_2) \quad (\text{Do quy luật cầu})$$

Từ đây tìm ra được $p_1; p_2$ theo $Q_1; Q_2$. khi đó doanh thu của xí nghiệp là:

$$R = p_1 Q_1 + p_2 Q_2$$

Lợi nhuận (Profit) của xí nghiệp là: $\pi = R - C$,

mức sản lượng tìm ra được Q_1, Q_2 phải tìm là giá trị Q_1, Q_2 dương sao cho π đạt cực đại.

Ví dụ:

Lấy $Q_{D1} = 40 - 2p_1 + p_2$; $Q_{D2} = 15 + p_1 - p_2$ và hàm tổng chi phí trong một đơn vị thời gian là:

$C = C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2$ tìm mức sản lượng để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.

Lý luận như trên ta đi tới hệ phương trình.

$$Q_{D1} = 40 - 2p_1 + p_2$$

$$Q_{D2} = 15 + p_1 - p_2$$

Giải hệ tìm được:

$$p_1 = 55 - Q_1 - Q_2 \quad ; \quad p_2 = 70 - Q_1 - 2Q_2$$

Doanh thu của xí nghiệp là:

$$R = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 = (55 - Q_1 - Q_2) Q_1 + (70 - Q_1 - 2Q_2) Q_2$$

Lợi nhuận (Profit) của xí nghiệp là: $\pi = R - C =$

$$= (55 - Q_1 - Q_2) Q_1 + (70 - Q_1 - 2Q_2) Q_2 - (Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2) =$$

$$= -2Q_1^2 - 3Q_2^2 - 3Q_1 Q_2 + 55Q_1 + 70Q_2$$

Ta tìm được cực trị của π :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4Q_1 - 3Q_2 + 55 = 0 \\ -6Q_2 - 3Q_1 + 70 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4Q_1 + 3Q_2 = 55 \\ 3Q_1 + 6Q_2 = 70 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 8 \\ Q_2 = \frac{23}{3} \end{cases}, \text{ và có: } \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4; \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -6; \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -3$$

Vậy $A = -4$; $B = -3$; $C = -6$

$$\begin{cases} A = -4 < 0 \\ \Delta = AC - B^2 = 24 - 9 = 15 > 0 \end{cases} \Rightarrow \pi \text{ đạt cực đại tại } (Q_1, Q_2) = (8, 23/3).$$

Vậy mức sản lượng (Q_1, Q_2) mà xí nghiệp sản xuất để có lợi nhuận tối đa là $(8, 23/3)$.

Cách khác: Tính vi phân bậc 2: $d^2\pi = -4dQ_1^2 - 6dQ_2^2 + 2(-3)dQ_1 dQ_2 =$

$$= -6 \left(dQ_2 + \frac{dQ_1}{2} \right)^2 - \frac{5}{2} dQ_1^2 < 0 \implies (Q_1, Q_2) = (8, 23/3) \text{ CĐ.}$$

4.3 Bài toán người tiêu dùng:

Giả sử người tiêu dùng định dùng một số tiền là B để mua sắm $n=2$ loại hàng. Biết rằng giá của các loại hàng là $p_1; p_2$, hàm hữu dụng cho $n=2$ loại hàng trên: $u=u(x,y)$, trong đó x,y là số lượng hàng thứ nhất thứ hai tương ứng mà người đó mua. Hãy xác định số lượng hàng mà người tiêu dùng sẽ mua, sao cho giá trị sử dụng lớn nhất.

Ta phải tìm cực trị hàm số $u=u(x,y)$ với điều kiện: $p_1x + p_2y = B$.

Đây là bài toán tìm cực trị có điều kiện.

Ví dụ: $u(x,y) = \sqrt{(x+2)(y+1)}$ và $p_1=4; p_2=6; B=200$

Ta tìm cực trị của hàm $u = \sqrt{(x+2)(y+1)}$ với điều kiện:

$$\varphi(x,y) = 4x + 6y - 200 = 0$$

Tìm điểm dừng (x_0, y_0) và số λ thoả hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{y+1}{\sqrt{(x+2)(y+1)}} + \lambda 4 = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)(y+1)}} + \lambda 6 = 0 \\ 4x + 6y - 200 = 0 \end{cases}$$

giải hệ được: $x_0 = \frac{99}{4}$; $y_0 = \frac{101}{6}$; $\lambda = \frac{-1}{4\sqrt{6}}$. $\implies u = \frac{107}{\sqrt{24}}$

Xét hàm Lagrange: $L(x,y) = u(x,y) + \lambda \varphi(x,y) =$
 $= \sqrt{(x+2)(y+1)} - \frac{1}{4\sqrt{6}}(4x+6y-200),$

tính toán: $A = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -\frac{(y+1)^2}{4(\sqrt{(x+2)(y+1)})^3} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{(x+2)^3}} \right),$

$B = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{(x+2)(y+1)}};$ $C = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{(y+1)^3}},$

$A = -\frac{1}{428} \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{-\sqrt{6}}{312};$ $C = -\frac{\sqrt{54}}{428} = \frac{-3\sqrt{6}}{428};$ $B = \frac{\sqrt{24}}{428} = \frac{\sqrt{6}}{214}$

$d^2L = -\frac{1}{428} \sqrt{\frac{32}{3}} dx^2 + 2 \frac{1}{428} \sqrt{24} dx dy - \frac{1}{428} \sqrt{54} dy^2$

dx, dy thoả $d\varphi = 0 \Leftrightarrow 4dx + 6dy = 0 \Leftrightarrow dy = -2/3 dx$
 $\implies d^2L < 0 \implies u$ đạt cực đại

Cách khác1: Viết lại dưới dạng vi phân:

$d^2L = -\frac{3\sqrt{6}}{428} \left(dy - \frac{\sqrt{6}}{18} dx \right)^2 - \frac{23\sqrt{6}}{7704} dx^2 < 0 \implies u$ đạt cực đại

Cách khác2: $\frac{4(x+2)+6(y+1)}{2} \geq \sqrt{4(x+2) \cdot 6(y+1)} = \sqrt{24}u$

$107 = \frac{(4x+6y-200)+214}{2} = \frac{4(x+2)+6(y+1)}{2} \geq \sqrt{24}u \Leftrightarrow \frac{107}{\sqrt{24}} \geq u$

và chỉ bằng khi $4(x+2) = 6(y+1) \implies x = \frac{99}{4}, y = \frac{101}{6}$

Cách khác3: Có thể giải bằng hình học, sinh viên tự giải.

Cách khác4: Dùng định thức xét dấu: $n=2, m=1$, chỉ xét một định thức:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & \frac{-\sqrt{6}}{321} & \frac{\sqrt{6}}{214} \\ 6 & \frac{\sqrt{6}}{214} & \frac{-3\sqrt{6}}{428} \end{vmatrix} = \frac{48\sqrt{6}}{107} > 0 \implies \text{CD}$$

4.4 Bài toán tìm đầu vào sao cho chi phí sản xuất bé nhất.

Giả sử hàm sản xuất $Q = Q(x,y)$ có đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục và $\frac{\partial Q}{\partial x} > 0; \frac{\partial Q}{\partial y} > 0$. Đơn giá của đầu vào cố định ký hiệu là: p_1, p_2 .

Bài toán đặt ra là: xác định sản lượng đầu vào (x,y) để sản xuất ra Q sản phẩm với tổng chi phí bé nhất.

Mô hình của bài toán là:

Tìm (x_0, y_0) để $C = p_1x + p_2y$ nhỏ nhất với điều kiện

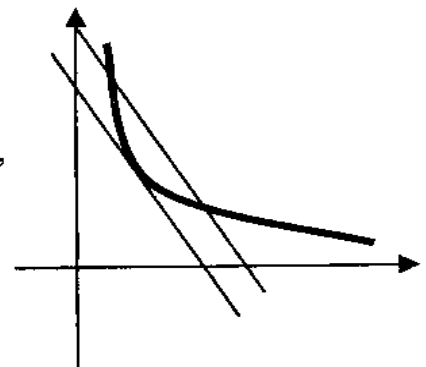
$Q(x,y) = Q$. Ta phải tìm giá trị nhỏ nhất của hàm

$C = C(x,y) = p_1x + p_2y$ thỏa điều kiện: $\varphi(x,y) = Q(x,y) - Q = 0$.

Đây là bài toán cực trị có điều kiện đã biết cách giải.

Ví dụ 1: Cho $Q(x,y) = 10\sqrt{xy}$; $P_1 = 10$; $P_2 = 15$; $Q = 20$

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 10\sqrt{xy} - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 + \lambda 5\sqrt{\frac{y}{x}} = 0 \\ 15 + \lambda 5\sqrt{\frac{x}{y}} = 0 \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases}$$



Giải hệ tìm được $x_0 = \sqrt{6}, y_0 = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \lambda = -\sqrt{6}$,

Xét hàm Lagrange:

$$L(x,y) = C(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = 10x + 15y - \sqrt{6}(10\sqrt{xy} - 20).$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{x} \sqrt{\frac{y}{x}}; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{-5\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{y} \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}; \quad B = \frac{-5\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-5\sqrt{6}}{4};$$

$$C = \frac{5\sqrt{6}}{2} \frac{3}{2\sqrt{6}} \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{15\sqrt{6}}{8}$$

$$\text{vậy } \Delta = AC - B^2 = \frac{75}{8} - \frac{150}{16} = 0 \Rightarrow L(x,y) \text{ đạt cực tiểu ?? (phá sản)}$$

Cách khác: Viết lại dưới dạng vi phân:

$$d^2L = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} dx^2 + \frac{15}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} dy^2 - \frac{5}{2} \sqrt{6} dx dy, \text{ sau một phép tính toán, ta có:}$$

$$d^2L = \frac{15}{8} \sqrt{6} \left(dy - \frac{2}{3} dx \right)^2 > 0 \Rightarrow L(x,y) \text{ đạt cực tiểu ?}. \text{ Thật ra ta có thể}$$

đưa về hàm một biến để khảo sát, để thấy thực sự $L(x,y)$ đạt cực tiểu. Có thể thấy rõ điều này qua ý nghĩa hình học của bài toán như hình vẽ. ta còn có thể thấy được kết quả này qua BĐT Cauchy:

$$\frac{10x + 15y}{2} \geq \sqrt{10x \times 15y} = \sqrt{150} \sqrt{xy} = 2\sqrt{150} \Rightarrow 10x + 15y \geq 4\sqrt{150},$$

$$\text{BĐT chỉ xảy ra dấu bằng khi } 10x = 15y \Leftrightarrow 2x = 3y \Rightarrow x = \sqrt{6}, y = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Nhận xét: Đây là bài toán có dạng vi phân bậc 2 toàn phương là suy biến nghĩa là $|H| = 0 \Leftrightarrow \Delta = AC - B^2 = \frac{75}{8} - \frac{150}{16} = 0$, nhưng điểm dừng vẫn là điểm cực trị như đã nhận xét ở trên.

Cách khác: Dùng định thức xét dấu: $n=2, m=1$, chỉ xét một định thức:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{10}{3} & \frac{15}{2} \\ \frac{10}{3} & \frac{5\sqrt{6}}{6} & \frac{-5\sqrt{6}}{4} \\ \frac{15}{2} & \frac{-5\sqrt{6}}{4} & \frac{15\sqrt{6}}{8} \end{vmatrix} = -\frac{3125\sqrt{6}}{24} < 0 \Rightarrow \text{CT}$$

Ví dụ 2: Đề thi cao học kinh tế 5/2007.

Dùng phương pháp Lagrange tìm lượng lao động L (Labor) và vốn K (Capital), để cực tiểu hóa hàm chi phí C (Cost), $C = L + 0.01K$, $K > 0$, $L > 0$, với ràng buộc về hàm sản xuất Cobb-Douglas: $Q = \sqrt{LK} = 20$

Giải:

$$f(L, K, \lambda) = L + 0.01K + \lambda(\sqrt{LK} - 20), \quad g(L, K) = \sqrt{LK} - 20 = 0$$

$$f'_L = 1 + \lambda \frac{K}{2\sqrt{LK}} = 0, \quad f'_K = 0.01 + \lambda \frac{L}{2\sqrt{LK}} = 0, \quad f'_\lambda = \sqrt{LK} - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 100 = \frac{1}{0.01} = \frac{K}{L} \Rightarrow K = 100L,$$

thế vào $\sqrt{LK} = 20 \Rightarrow \sqrt{L \times 100L} = 20 \Leftrightarrow L = 2, K = 200, \lambda = -0.2$
 vì $K > 0, L > 0$, nên ta không lấy nghiệm âm.

$$f''_{LL} = -\frac{1}{4} \lambda K^2 (LK)^{-3/2}, \quad f''_{KK} = -\frac{1}{4} \lambda L^2 (LK)^{-3/2}$$

$$f''_{LK} = -\frac{1}{4} \lambda KL (LK)^{-3/2} + \frac{1}{2} \lambda \sqrt{KL}, \quad f''_{\lambda\lambda} = 0,$$

$$f''_{L\lambda} = \frac{K}{2\sqrt{LK}}, \quad f''_{K\lambda} = \frac{L}{2\sqrt{LK}}, \quad g'_L = K^{1/2} \frac{1}{2} L^{-1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{L}}, \quad g'_K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{K}}$$

thế 3 giá trị $L=2, K=200, \lambda = -0.2$

$$f''_{LL} = 0.25, \quad f''_{KK} = 0.000025, \quad f''_{LK} = -0.0025,$$

Thế vào ma trận Hessian:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial L} & \frac{\partial g}{\partial K} \\ \frac{\partial g}{\partial L} & a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial K} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0.05 \\ 5 & 0.25 & -0.0025 \\ 0.05 & -0.0025 & 0.000025 \end{vmatrix} = -0.0025 < 0$$

\Rightarrow CT

Ta có thể dùng vi phân bậc 2:

$$d^2 f = f''_{LL} dL^2 + 2 f''_{LK} dL dK + f''_{KK} dK^2 = 0.25(dL - 0.01dK)^2 > 0 \Rightarrow \text{CT.}$$

4.5 Công ty có nhiều thị trường tách biệt.

Phần này tổng quát hơn phần 4.1 và 4.2 ở trên.

Một công ty sản xuất độc quyền một loại sản phẩm, tiêu thụ trên 3 thị trường riêng biệt. các hàm cầu (Demand) về sản lượng (Quantity) theo đơn giá (Price) tương ứng trên 3 thị trường

$$Q_{D_1} = Q_1(P) = D_1(P_1, P_2, P_3), \quad Q_{D_2} = Q_2(P) = D_2(P_1, P_2, P_3),$$

$$Q_{D_3} = Q_3(P) = D_3(P_1, P_2, P_3).$$

Thông thường với $i = 1, 2, 3, P_i \uparrow \Rightarrow Q_{D_i}(P) \downarrow$ hay ngược lại.

Và hàm chi phí $C=C(Q)$, với $Q=Q_1+Q_2+Q_3$. Thông thường $C=C(Q)$ là hàm bậc 2 của Q , hay là một dạng toàn phương tổng quát theo 3 biến sản lượng: Q_1, Q_2, Q_3 .

• Tìm số lượng sản phẩm (Q_1, Q_2, Q_3), cung cấp cho từng thị trường để **lợi nhuận cao nhất** doanh thu (Revenue):

$$R_1(Q_1) = P_1(Q_1) \times Q_1, \quad R_2(Q_2) = P_2(Q_2) \times Q_2, \quad R_3(Q_3) = P_3(Q_3) \times Q_3.$$

Lợi nhuận (Profit): $\pi = R - C = R_1(Q_1) + R_2(Q_2) + R_3(Q_3) - C(Q)$.

trong đó doanh thu: $R = \sum_{i=1}^3 R_i(Q_i) = R_1(Q_1) + R_2(Q_2) + R_3(Q_3)$.

Ta định nghĩa thêm một số khái niệm trong toán kinh tế như sau:

• Biên tế chi phí MC (Marginal Cost): $MC = C'_Q$ (đạo hàm riêng của chi phí C theo biến sản lượng Q).

• Biên tế doanh thu MR (Marginal Revenue): $MR = R'_Q$ (đạo hàm riêng của doanh thu theo biến sản lượng Q).

• Độ co dãn: $\varepsilon_{Q(P)} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} \xrightarrow{\Delta P \rightarrow 0} Q'_P \frac{P}{Q}$. trong đó hàm $Q = Q(P)$

Vậy $\varepsilon_{Q(P)} = Q'_P \frac{P}{Q}$. Vì $\varepsilon_{Q(P)} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \frac{P}{Q}$, nên khi tại đơn giá P , nếu

ta thay đổi 1% đơn giá, thì sản lượng cầu Q thay đổi theo chiều hướng tăng hay giảm nhờ vào độ co dãn $\varepsilon_{QP}\%$ dương hay âm.

Ví dụ: tại một đơn giá P nào đó và sau khi tính ta có: $\varepsilon_{Q(P)} = -5$, nghĩa là nếu ta tăng thêm 1% đơn giá, thì sản lượng cầu Q sẽ giảm 5%. Ngược lại nếu ta giảm thêm 1% đơn giá, thì sản lượng cầu Q sẽ tăng 5%.

Ví dụ 0: Một công ty bán một loại sản phẩm với hàm cầu: $Q_D = D(P) = 200 - 50P$, tổng chi phí là $C(Q) = Q + 10$, trong đó Q là sản lượng, P là đơn giá.

a/ Hãy xác định hàm lợi nhuận và tìm Q để công ty đạt lợi nhuận tối đa.

b/ Tính chi phí biên tế MC, và doanh thu biên tế MR, so sánh giữa chúng.

c/ Tính độ co dãn của Q theo P tại $P=3.6$. Nếu tại đơn giá $P=3.6$ này, công ty muốn tăng đơn giá thêm 1%, thì sản lượng cầu tăng hay giảm bao nhiêu phần trăm.

Giải:

a/ Ta có: $P = 4 - 0.02Q$, $\Rightarrow R = QP = -0.02Q^2 + 4Q$,

$\pi = R - C = -0.02Q^2 + 3Q - 10$, $\Rightarrow \pi'_Q = -0.04Q + 3 = 0 \Rightarrow Q = 75$,

$\pi''_Q = -0.04 < 0$, vậy lợi nhuận π đạt cực đại tại $Q=75$ sản lượng.

b/ Từ $C(Q) = Q + 10 \Rightarrow MC = C'_Q = 1$. Từ $R = QP = -0.02Q^2 + 4Q$
 $\Rightarrow MR = R'_Q = -0.04Q + 4$, khi $Q=75$ thì $MR=1$, lúc này $MC=MR$.

c/ Tại $P=3.6$, $\varepsilon_{Q(P)} = Q'_P \frac{P}{Q} = -50 \frac{P'}{200 - 50P} = -50 \frac{3.6}{200 - 50 \times 3.6} = -9$

nên khi tại đơn giá $P=3.6$, nếu ta tăng đơn giá thêm 1% , thì sản lượng cầu Q sẽ giảm 9%.

Ví dụ 1: Giả thuyết như trên với: $Q_{D_1} = D_1(P_1) = 80 - \frac{P_1}{2}$,

$Q_{D_2} = D_2(P_2) = 80 - \frac{P_2}{3}$, $Q_{D_3} = D_3(P_3) = 80 - \frac{P_3}{4}$

Chi phí: $C(Q) = Q^2 + 10Q + 30$, chi phí này chính là một biểu diễn quadric tổng quát trong R^3 như đã phân tích ban đầu (vừa có dạng toàn phương, vừa có dạng bậc nhất tuyến tính, vừa có hằng số ban đầu).

Giải:

Nhận thấy: với $i = \overline{1, 2, 3}$, $P_i \uparrow \Rightarrow Q_{D_i} \downarrow$ hay ngược lại.

Ta có: $P_1 = 160 - 2Q_1$, $P_2 = 240 - 3Q_2$, $P_3 = 320 - 4Q_3$,

$\Rightarrow R_1(Q_1) = P_1(Q_1)Q_1 = (160 - 2Q_1)Q_1$

$\Rightarrow R_2(Q_2) = P_2(Q_2)Q_2 = (240 - 3Q_2)Q_2$

$\Rightarrow R_3(Q_3) = P_3(Q_3)Q_3 = (320 - 4Q_3)Q_3$

với $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$\pi = R_1(Q_1) + R_2(Q_2) + R_3(Q_3) - C(Q) = R_1 + R_2 + R_3 - Q^2 - 10Q - 30$

Chú ý: $(Q^2 + 10Q + 30)'_{Q_i} = 2QQ'_{Q_i} + 10Q'_{Q_i} = 2Q \times 1 + 10 \times 1 = 2Q + 10$

$$\overline{\nabla \pi} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \\ \pi'_{Q_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 160 - 4Q_1 = 2Q + 10 = 2(Q_1 + Q_2 + Q_3) + 10 \\ 240 - 6Q_2 = 2Q + 10 = 2(Q_1 + Q_2 + Q_3) + 10 \\ 320 - 8Q_3 = 2Q + 10 = 2(Q_1 + Q_2 + Q_3) + 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3Q_1 + Q_2 + Q_3 = 75 \\ Q_1 + 4Q_2 + Q_3 = 115 \\ Q_1 + Q_2 + 5Q_3 = 155 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 10 \\ Q_2 = 20 \\ Q_3 = 25 \end{cases} \text{ Xét đạo hàm bậc 2:}$$

$$\pi''_{Q_1 Q_1} = -6, \pi''_{Q_2 Q_2} = -8, \pi''_{Q_3 Q_3} = -10, \pi''_{Q_1 Q_2} = \pi''_{Q_1 Q_3} = \pi''_{Q_2 Q_3} = -2$$

$$H = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & -10 \end{bmatrix}, \text{ có } H_1 = -6, H_2 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 44 > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & -10 \end{vmatrix} = -2^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -8 \times 50 < 0, \text{ nên } \pi \text{ CD}$$

Vậy cần số lượng $Q_1 = 10$, tương ứng giá là: $P_1 = 160 - 2Q_1 = 140$

Vậy cần số lượng $Q_2 = 20$, tương ứng giá là: $P_2 = 240 - 3Q_2 = 180$

Vậy cần số lượng $Q_3 = 25$, tương ứng giá là: $P_3 = 320 - 4Q_3 = 220$

Cách khác: Viết lại dưới dạng vi phân:

$$\begin{aligned} d^2\pi &= -6dQ_1^2 - 8dQ_2^2 - 10dQ_3^2 - 4dQ_1dQ_2 - 4dQ_1dQ_3 - 4dQ_2dQ_3 = \\ &= -10 \left(dQ_3 + \frac{dQ_2 + dQ_1}{5} \right)^2 - \frac{38}{5} \left(dQ_2 + \frac{4dQ_1}{19} \right)^2 - \frac{100}{19} dQ_1^2 < 0 \end{aligned}$$

Nên π CD tại $(Q_1 = 10, Q_2 = 20, Q_3 = 25)$.

Ví dụ 2: Cũng với giả thuyết như trên với:

$$Q_{D1} = Q_1 = \boxed{-3P_1} + P_2 + 0P_3 + 130,$$

$$Q_{D2} = Q_2 = 2P_1 \boxed{-7P_2} + P_3 + 220$$

$$Q_{D3} = Q_3 = 0P_1 + P_2 \boxed{-5P_3} + 215 \quad \text{Chi phí: } C(Q) = Q^2 - 10Q + 30,$$

Giải:

Nhận thấy: với $i = \overline{1, 2, 3}$, $P_i \uparrow \Rightarrow Q_{D_i} \downarrow$ hay ngược lại.

$$\pi = R - C = P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 - (Q^2 - 10Q + 30)$$

Ta có thể giải theo P_1, P_2, P_3 , rồi chuyển về Q_1, Q_2, Q_3

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -P_1 - 5P_2 - 4P_3 + 565$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \Rightarrow Q'_{P_1} = Q'_{1,P_1} + Q'_{2,P_1} + Q'_{3,P_1} = -3 + 2 + 0 = -1,$$

$$\bullet \pi'_{P_1} = \left(P_1 Q'_{1,P_1} + Q_1 \right) + P_2 Q'_{2,P_1} + P_3 Q'_{3,P_1} - \left(2QQ'_{P_1} - 10Q'_{P_1} \right) =$$

$$(-6P_1 + P_2 + 130) + 2P_2 + 0P_3 - 2(-P_1 - 5P_2 - 4P_3 + 565)(-1) + 10(-1)$$

$$= (-6P_1 + P_2 + 130) + 2P_2 + 2(-P_1 - 5P_2 - 4P_3 + 565) - 10$$

$$\pi'_{P_1} = (-8P_1 - 7P_2 - 8P_3 + 1250) = 0, \text{ tương tự:}$$

$$\bullet \pi'_{P_2} = P_1 Q'_{1,P_2} + (P_2 Q'_{2,P_2} + Q_2) + P_3 Q'_{3,P_2} - (2QQ'_{P_2} - 10Q'_{P_2}) =$$

$$Q'_{P_2} = Q'_{1,P_2} + Q'_{2,P_2} + Q'_{3,P_2} = 1 - 7 + 1 = -5,$$

$$\pi'_{P_2} = (-7P_1 - 64P_2 - 38P_3 + 5820) = 0, \text{ tương tự:}$$

$$\bullet \pi'_{P_3} = P_1 Q'_{1,P_3} + P_2 Q'_{2,P_3} + (P_3 Q'_{3,P_3} + Q_3) - (2QQ'_{P_3} - 10Q'_{P_3}) =$$

$$Q'_{P_3} = Q'_{1,P_3} + Q'_{2,P_3} + Q'_{3,P_3} = 0 + 1 - 5 = -4,$$

$$\pi'_{P_3} = (-8P_1 - 38P_2 - 42P_3 + 4695) = 0, \text{ bấm máy ta có:}$$

giải ra: $P_1 = \frac{229115}{4027}, P_2 = \frac{215590}{4027}, P_3 = \frac{422925}{8054}$, thế vào ta có:

$$Q_1 = \frac{51755}{4027}, Q_2 = \frac{93005}{8054}, Q_3 = \frac{48165}{8054}. \text{ Xét đạo hàm bậc 2:}$$

$$\pi''_{P_1 P_1} = -8, \pi''_{P_2 P_2} = -64, \pi''_{P_3 P_3} = -42,$$

$$\pi''_{P_1 P_2} = -7, \pi''_{P_1 P_3} = -8, \pi''_{P_2 P_3} = -38, \text{ và ma trận Hess:}$$

$$H = \begin{bmatrix} -8 & -7 & -8 \\ -7 & -64 & -38 \\ -8 & -38 & -42 \end{bmatrix}, \text{ có } H_1 = -8 < 0, H_2 = \begin{vmatrix} -8 & -7 \\ -7 & -64 \end{vmatrix} > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ -7 & -64 & -38 \\ -8 & -38 & -42 \end{vmatrix} = -5566 < 0, \text{ nên } \pi \text{ CD}$$

4.6 Hoạch định vật tư tồn kho có giới hạn vốn và không gian trữ.

Hệ thống tồn kho có vốn giới hạn J và không gian chứa giới hạn W. Mô hình hệ thống tồn kho EOQ (Economic Order Quantity) là bài toán:

$$G = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{R_i C}{Q_i} + \frac{Q_i P_i F}{2} \right) \rightarrow \min, \text{ với hai ràng buộc bất đẳng thức:}$$

$$g_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i P_i}{2} \leq J \text{ và } g_2 = \sum_{i=1}^{i=n} w_i Q_i \leq W. \text{ Trong đó:}$$

G: Tổng chi phí tồn trữ cho một đơn hàng.

g_1 : Tổng vốn.

- g_2 Tổng không gian để chứa vật tư.
- Q_i : Cỡ (đơn vị: kg, mét, cái,...) lô hàng vật tư thứ i cần đặt (ẩn số cần tìm), $i = \overline{1, n}$
- R_i : Nhu cầu hàng năm (đơn vị/ năm - đv/n), $i = \overline{1, n}$
- C: Phí đặt hàng (cho một đơn hàng, gồm n vật tư), có đơn vị: ngàn đồng/ đơn hàng $\text{ND}/\text{đh}$.
- P_i : Phí mua (đơn vị) vật tư thứ i , $i = \overline{1, n}$, có đơn vị: ngàn đồng/ đơn vị $\text{ND}/\text{đv}$.
- $H_i = FP_i$ Phí tồn trữ đơn vị hàng năm vật tư thứ i , $i = \overline{1, n}$,
ngàn đồng
có đơn vị: ngàn đồng/ đơn vị.năm- $\text{ND}/\text{đv.n} = \frac{\text{đơn vị}}{\text{năm}}$
- F: Hệ số tồn trữ hay tỉ lệ phí tồn trữ trên phí mua hàng đơn vị hàng năm, $F = (0.2 \rightarrow 0,4)$ (1/n).
- w_i : không gian giới hạn cho mỗi đơn vị vật tư thứ i , $i = \overline{1, n}$, có đơn vị: (m^3, m^2, \dots)

Hệ có hai ràng buộc là bất đẳng thức, ta thành lập hàm Lagrange $L = G + \lambda_1 (g_1 - J) + \lambda_2 (g_2 - W)$, trong đó $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ là hai nhân tử Lagrange ta cần tìm. Để giải bài toán trên, ta có điều kiện tối ưu Kuhn-Tucker làm cực tiểu hàm G với hai ràng buộc bất đẳng thức trên là:

$$\begin{cases} L'_{Q_i} = G'_{Q_i} = -\frac{R_i C}{Q_i^2} + \frac{P_i F}{2} + \frac{\lambda_1 P_i}{2} + \lambda_2 w_i = 0, i = \overline{1, n} & (1) \\ \lambda_1 (g_1 - J) = 0 & (2) \\ \lambda_2 (g_2 - W) = 0 & (3) \\ g_1 - J \leq 0 & (4) \\ g_2 - W \leq 0 & (5) \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Hệ phi tuyến này có $n+2$ phương trình và $n+2$ ẩn λ_1, λ_2 và $Q_i, i = \overline{1, n}$

Việc chứng minh tính duy nhất nghiệm ta không bàn ở đây.

Việc giải hệ này được thực hiện bằng phương pháp lặp sau:

$$(1) \rightarrow Q_i^* = \sqrt{\frac{2CR_i}{F P_i + \lambda_1 P_i + 2\lambda_2 w_i}} \quad (6)$$

$$(2) \rightarrow \lambda_1 > 0 \Rightarrow g_1 - J = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{Q_i P_i}{2} - J = 0 \quad (7)$$

$$(3) \rightarrow \lambda_2 > 0 \Rightarrow g_2 - W = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} w_i Q_i - W = 0 \quad (8)$$

Thuật toán:

Ta bắt đầu với $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, tính các Q_i ở (6), sau đó thử lại (7) và (8) xem có thỏa mãn chưa? rồi tăng λ_1, λ_2 dần đều lên đến khi (7) và (8) cái nào bằng 0 sau cùng, ví dụ (8) bằng 0 sau cùng, lúc đó giữ λ_2 cố định, rồi lại bắt đầu với λ_1 tăng dần đều bắt từ 0, cho đến khi (7) thỏa thì dừng thuật toán. Sinh viên có thể dùng excel để giải lập hệ trên.

Ví dụ: Xem bảng hệ tồn kho 5 vật tư với các tham số: C=10 VNĐ, F=0.2

R_i (đv/n)	P_i (VNĐ/đv)	w_i (m^3)
600	3	1
900	10	1.5
2400	5	0.5
12000	5	2
18000	1	1

Với vốn giới hạn là 2000 VNĐ và giới hạn không gian chứa $W=1500$ (m^3)

Giải:

Chi phí tồn kho: $G = 10 \sum_{i=1}^5 \frac{R_i}{Q_i} + 0.2 \sum_{i=1}^5 \frac{Q_i P_i}{2} \rightarrow \min,$

Hai điều kiện ràng buộc bất đẳng thức:

-Ràng buộc vốn: $g_1 = \sum_{i=1}^5 \frac{Q_i P_i}{2} \leq 2000 \quad (7)$

-Ràng buộc không gian: $g_2 = \sum_{i=1}^5 w_i Q_i \leq 1500 \quad (8)$

Cỡ (size) lô hàng: $Q_i^* = \sqrt{\frac{2CR_i}{F P_i + \lambda_1 P_i + 2\lambda_2 w_i}}, i = \overline{1, n} \quad (6)$

Thuật toán:

Trong thực hành, ta bắt đầu với $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, tính các Q_i ở (6), sau đó thử lại (7) và (8) xem có thỏa mãn chưa? rồi tăng λ_1, λ_2 dần đều ($\Delta = 0.005$) lên đến khi ta thấy (8) gần bằng 0 sau cùng, lúc đó giữ $\lambda_2 = 0.21$ cố định, rồi lại bắt đầu với λ_1 tăng dần bắt từ 0, cho đến khi (7) gần bằng 0 thì $\lambda_1 = 0.13$ lúc này ta dừng thuật toán.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
i	R_i	P_i	w_i			λ_1	λ_2	Q_i	$P_i Q_i / 2$	$w_i Q_i$
1	600	3	1	0.125	0.205	0.13	0.21	92.25312	276.7594	92.25312
2	900	10	1.5	-0.005	-0.005			67.67683	676.7683	101.5152
3	2400	5	0.5					160.6439	803.2193	80.32193
4	12000	5	2					310.4602	1552.301	620.9204
5	18000	1	1					692.8203	692.8203	692.8203
6								Σ	0.934159	87.83104

Ô K6: $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i P_i}{2} - 2000$, Ô L6: $\sum_{i=1}^{i=n} w_i Q_i - 1500$ là 2 ô kiểm tra ĐK: (7), (8)

Vậy nên đặt hàng theo chu kỳ cỡ lô hàng: $Q_1 = 92$ đv, $Q_2 = 68$ đv, $Q_3 = 161$ đv, $Q_4 = 310$ đv, $Q_5 = 693$ đv là tối ưu về chi phí tồn kho.

BÀI TẬP

1/ Chứng minh các giới hạn sau:

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x - 1}{x^2 + y^2} = -1; \quad b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = 0; \quad c) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} x^y = a^b$$

$$d) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ (không có giới hạn)}$$

2/ Tính các đạo hàm riêng: $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$

$$a/ z = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad b/ z = x^2 + y^2 + 6x - 2y - 1$$

$$c/ z = e^{x-y} + 2x - 5y - 6$$

$$d/ z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} + x - 4y + \cos y \quad e/ z = \ln(x^2 + 2y)$$

3/ Chứng minh hàm $z = y \ln(x^2 - y^2)$ thỏa phương trình

$$\frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{z}{y^2}$$

4/ Chứng minh hàm $z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ thỏa phương trình: $z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} = (z''_{xy})^2$

5/ Tính dz và d^2z của:

$$a/ z = \sin(x^2 + y^2) \quad b/ z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad c/ z = e^x (\cos y + x \sin y)$$

6/ Tìm z''_x và z''_{x^2} nếu $z = x^2 + y^2$ ở đó $y = y(x)$ được xác định từ phương trình $x^2 - xy + y^2 = 1$

7/ Làm các câu sau:

13/ Chứng minh trong tất cả các tam giác có chu vi cho trước thì tam giác đều có diện tích lớn nhất

14/ Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $M_0(1,1,0)$ đến mặt phẳng $3x + 3y - z = 7$

15/ Tìm 1 điểm $M(x,y)$ trên đường cong $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$ sao cho MM_0 là đoạn ngắn nhất với $M_0(4,1)$

16/ Tìm cực trị hàm:

$$a/ z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ thỏa điều kiện } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$$

b/ $f(x,y) = ax + by$ với x,y thoả $a/x + b/y = 1$, trong đó $a,b,x,y > 0$.

17/ Tính gần đúng

$$a) \sqrt{(1.02)^2 + (0.05)^2}$$

$$b) \ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$$

18/ Chứng minh có $\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\dots k_r!}$ cách biểu diễn đạo hàm riêng bằng

nhau của hàm r biến $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$, với đạo hàm riêng bậc $n = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r$, trong đó lấy đạo hàm bậc k_1 đối với biến x_1 , lấy đạo hàm bậc k_2 đối với biến x_2, \dots lấy đạo hàm bậc k_r đối với biến x_r .

19/ Đạo hàm dạng toàn phương.

a/ Cho $A_{m,n}$, ma trận hằng số gồm m dòng, n cột,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, hàm số f gồm $(n+m)$ biến, được xác định bởi tích vô hướng sau

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = (Ax, y), \text{ chứng minh:}$$

$$(Ax, y) = (x, A^T y)$$

b/ Như giả thiết câu a/, hàm số n biến được định nghĩa:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (Ax, b), \text{ trong đó:}$$

$b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Chứng minh: $\nabla f = \begin{bmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{bmatrix} = (Ax, b)'_x = A^T b$

c/ $A_{n,n}$, ma trận vuông hàng số gồm n dòng, n cột,
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

Hàm n biến được định nghĩa:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (Ax, x) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)x_1 +$$

$$+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n)x_2 +$$

$$+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n)x_3 +$$

$$+ \dots +$$

$$+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n)x_n$$

Chứng minh:

1/ $(Ax, x)'_x = (A^T + A)x$

2/ $(Ax, Ax)'_x = (x, A^T Ax)'_x = 2A^T Ax$

d/ Trong \mathbb{R}^m , $A_{m,n}$, ma trận chữ nhật, định nghĩa độ dài qua tích vô hướng: $\|Ax - b\|^2 = (Ax - b, Ax - b)$

1/ Chứng minh: với A, b cố định, ta có:

$$\|Ax - b\| \rightarrow \min \Leftrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

2/ Nếu $C = A^T A$ chéo hóa được, i.e có W , $\det(W) \neq 0$ sao cho:

$$W^{-1} C W = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ thì nghiệm câu 1/ được viết lại:}$$

$$x = W D^{-1} W^{-1} A^T b.$$

e/ Cho $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$,

$y = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, là hai hàm số n biến, mỗi thành phần

biến lại là hàm theo t . Chứng minh: $\frac{d}{dt}(x, y) = \left(\frac{dx}{dt}, y\right) + \left(x, \frac{dy}{dt}\right)$

f/ Cho $A_{m,n}$ ma trận gồm m dòng, n cột các thành phần của ma trận

là hàm theo biến t , chứng minh: $\frac{d}{dt}(Ax) = \left(\frac{dA}{dt}, x\right) + \left(A, \frac{dx}{dt}\right),$

với x giả thiết của câu e.

20/ Cho $x = a + ht$, $y = b + kt$, đặt $F(t) = f(x, y)$, chứng minh:

$$F_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i h^i k^{n-i} f_{x^i y^{n-i}}^{(n)}$$

21/ Chứng minh công thức sau bằng khai triển Taylor:

$$x^2 + xy - y^2 = -5 + 5(y+2) + \frac{1}{2} \left[2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) - 2(y+2)^2 \right]$$

22/ Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm với giá bán trên thị trường là $P_1=60$; $P_2=40$. với tổng chi phí là

$$C=C(q_1, q_2) = 2q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2$$

q_1, q_2 là mức sản lượng mà xí nghiệp sản xuất.

Tìm mức sản lượng để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.

23/ Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu và hàm tổng chi phí của xí nghiệp:

$$Q_{D1}=250 - P_1 + P_2; \quad Q_{D2} = 300 + P_1 - 2P_2$$

$$C = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_1Q_2 + 500Q_1 + 220Q_2 + 10.$$

Tìm mức sản lượng để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.

24/ Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm có hàm sản xuất tuân theo quy luật: $Q = Q(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ đơn giá đầu vào của mỗi sản phẩm là $P_1=15$, $P_2=20$. hãy xác định mức sản lượng mà xí nghiệp phải sản xuất để khi sản xuất ra $Q=490$ sản phẩm xí nghiệp bỏ ra chi phí thấp nhất.

25/ Một người có số tiền là 4.000.000đ để mua hai loại hàng với giá $P_1=500.000đ$ và $P_2=400.000đ$. tìm số lượng hai loại hàng trên người đó mua để có giá trị sử dụng lớn nhất. Biết tính hữu dụng của hai mặt hàng trên tuân theo quy luật: $u = u(x, y) = (x+4)(y+5)$.

26/ Một công ty sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm có hàm cầu và hàm tổng chi phí như sau:

$$Q_{D1} = 40 - P_1 + 1/2P_2; \quad Q_{D2} = 35 + P_1 - P_2$$

$$C = C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 7Q_1 + 38Q_2 + 3$$

a. Tìm mức sản lượng để công ty có lợi nhuận lớn nhất.

b. Tìm mức sản lượng để công ty có lợi nhuận lớn nhất với điều kiện $Q_1+Q_2=40$.

27/ Tìm cực trị $u=x+y+z$ với $xyz=125$.

28/ Tìm cực trị $f(x,y)=x+y$ với $x^2+(1/4)y^2+2z^2=1$.

29/ Tìm cực trị $f(x,y,z,t)=x+y+z+t$ với $16-xyzt=0$.

30/ Tìm cực trị hàm: $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 1$

31/ Giả thuyết như lý thuyết với các hàm cầu:

$$\begin{cases} Q_{D1} = Q_1 = \boxed{-3P_1} + P_2 + P_3 + 130 \\ Q_{D2} = Q_2 = 2P_1 + \boxed{-5P_2} + P_3 + 220, \\ Q_{D3} = Q_3 = 0P_1 + P_2 + \boxed{-3P_3} + 215 \end{cases}$$

Chi phí: $C(Q) = Q^2 - 10Q + 30$, tìm lợi nhuận lớn nhất.

ĐS: $P_1 = \frac{163205}{1588}$, $P_2 = \frac{161825}{1588}$, $P_3 = \frac{41760}{397}$, thế vào ta có:

$$Q_1 = \frac{15175}{794}, Q_2 = \frac{9380}{397}, Q_3 = \frac{6815}{794}$$

32/ Giả thuyết như lý thuyết với các hàm cầu:

$$\begin{cases} Q_{D1} = Q_1 = \boxed{-3P_1} + 1.P_2 + 40 \\ Q_{D2} = Q_2 = 2P_1 + \boxed{-4P_2} + 30 \end{cases}, \text{ chi phí: } C(Q) = Q^2 - Q + 30,$$

tìm lợi nhuận lớn nhất.

b/ Cũng tìm Q_1, Q_2 , để có lợi nhuận tối ưu, với thêm điều kiện là: Đánh thuế 10 đồng trên một sản phẩm Q_1 , và đánh thuế 20 đồng trên một sản phẩm Q_2 , nghĩa là lúc này

$$C(Q) = Q^2 - Q + 30 - 10Q_1 - 20Q_2$$

33/ Dùng phương pháp Lagrange tìm lượng lao động L (Labor) và vốn K (Capital), để cực tiểu hóa hàm chi phí C (Cost), $C = L + 0.01K$, $K > 0$, $L > 0$, với ràng buộc về hàm sản xuất $Q = \sqrt{LK} = 20$

34/ Tìm lượng lao động L (Labor) và vốn K (Capital), để cực đại hóa hàm lợi nhuận, $\pi = 6\left(L^{1/3}K^{1/3}\right) - 2L - 0.02K$

35/ Kiểm chứng công thức:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} K(u, t) du \right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K(u, t)}{\partial t} du + K\{b(t), t\} \frac{db}{dt} - K\{a(t), t\} \frac{da}{dt}$$

Với $K(u, t) = \sin(2t^2 u)$, $b(t) = e^t + 1$, $a(t) = 2t + 1$, ta kiểm chứng:

$$\int_{a(t)}^{b(t)} K(u, t) du = \frac{1}{2t^2} \left(-\cos[2t^2 e^t + 2t^2] + \cos[4t^3 + 2t^2] \right), \text{ vế trái:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} K(u, t) du \right) &= -6 \sin [4t^3 + 2t^2] + e^t \sin [2t^2 e^t + 2t^2] + \\ &+ \frac{1}{t} \left(2 \sin [2t^2 e^t + 2t^2] - 2 \sin [4t^3 + 2t^2] + 2e^t \sin [2t^2 e^t + 2t^2] \right) + \\ &+ \frac{1}{t^3} \left(\cos [2t^2 e^t + 2t^2] - \cos [4t^3 + 2t^2] \right) \\ \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K(u, t)}{\partial t} du &= \int_{2t+1}^{e^t+1} 4tu \cos(2t^2 u) du = \dots \\ K\{b(t), t\} \frac{db}{dt} - K\{a(t), t\} \frac{da}{dt} &= \sin [2t^2 (e^t + 1)] e^t - \sin [2t^2 (2t + 1)] 2 \end{aligned}$$

Tính toán chi tiết, để thấy 2 vế đều bằng nhau.

36/ Tính: $J = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-kx} dx$, $\alpha, k > 0$. HD: Bỏ qua các ĐK hội tụ:

$$J'(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \sin \alpha x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2} \quad (\text{tích phân từng phần})$$

$$\Rightarrow J(\alpha, k) = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + k^2) + C, \quad J(\alpha = 0) = 0. \quad \text{Vậy } C = -\frac{1}{2} \ln k^2$$

$$\Rightarrow J(\alpha, k) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2} \right)$$

37/ Tính các đạo hàm: $f(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} e^{t\sqrt{1-x^2}} dx$, $f(t) = \int_{a+t}^{b+t} \frac{\sin tx}{x} dx$

CHƯƠNG 5

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (PTVP)

1. Mở đầu:

– Khi nghiên cứu một đại lượng vật lý thường không tìm được ngay quy luật liên hệ giữa các đại lượng đang xét nhưng lại có thể dễ dàng lập được mối liên hệ giữa các đại lượng ấy và các đạo hàm hoặc vi phân của chúng. Điều này diễn tả một cách tự nhiên nguyên lý nhân quả, một nền móng của khoa học tự nhiên.

– Phương trình vi phân thường là mô hình, mô phỏng toán học của hiện tượng vật lý, mà các hiện tượng vật lý là thực thể, là các thực thể tồn tại, hiện diện quanh ta. Nếu ta chấp nhận mô hình đó, nghĩa là mô hình phản ánh đúng hay gần đúng một hiện tượng vật lý nào đó, thì hệ quả của mô hình đó hay nói khác đi, nghiệm của phương trình đó “chắc chắn” tồn tại, như trong tự nhiên vẫn tồn tại một hệ quả của hiện tượng vật lý đó. Đây cũng là một biện chứng triết học về sự tồn tại nghiệm của các phương trình vi phân. Trong khi sự chứng minh tồn tại nghiệm của các phương trình vi phân trong toán học, mà đôi khi chỉ với phương pháp toán học chính xác đã không thành công, hay chí nhất cũng là cực khó. Chính vì lý do này mà những nhà vật lý và cơ học đã đi trước một bước, nghĩa là bằng cách nào đó họ chỉ cần tìm nghiệm, sao cho chúng “gần thỏa” phương trình vi phân, và cứ thế là họ ứng dụng chúng vào cuộc sống đời thường, và họ yên tâm với sự việc như vậy (với những lý luận “sơ đẳng” như trên đã trình bày) mà không cần chờ đến sự chính xác hóa của các nhà toán học rồi mới làm các công việc của họ. Và ngay trong giáo trình này chúng ta cũng chưa cần quan tâm đến các định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm của PTVP.

Ngoài ra, ngay cả tập nghiệm giải tích cho họ ptvp tuyến tính là rất ít, đó là chưa kể đến tập nghiệm giải tích cho họ ptvp phi tuyến lại còn ít hơn, mặc dù nghiệm của chúng vẫn tồn tại, nói cách khác, tìm nghiệm giải tích chính xác là rất khó, nên ngày nay người ta phát triển trường phái giải tích số, để tìm nghiệm gần đúng của chúng dưới dạng số, mà ta sẽ xét vấn đề này trong toán chuyên đề "phương pháp tính".

– Biểu thức biểu diễn sự liên hệ giữa các đại lượng và đạo hàm của chúng gọi là phương trình vi phân.

– Trong giáo trình chúng ta xét các phương trình vi phân trong đó hàm số chưa biết là hàm một biến, phương trình này còn gọi là phương trình vi phân thường.

2. Phương trình vi phân thường.

1) Dạng tổng quát: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (*)

Trong đó: y là hàm phải tìm, y chỉ phụ thuộc vào biến x

- 2) Nghiệm phương trình vi phân: là hàm $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình (*).
- 3) Cấp của phương trình vi phân: là cấp cao nhất của đạo hàm (hoặc vi phân) của y trong phương trình (*).
- 4) Nếu $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ có dạng:
 $a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = \varphi(x)$,
 gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp n .
 Nếu $\varphi(x) \equiv 0$ gọi là phương trình tuyến tính thuần. Trong giáo trình chúng ta chỉ xét phương trình vi phân cấp 1, 2.

BÀI 1: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I

1.1 Các Khái Niệm:

- 1) Dạng tổng quát $F(x, y, y') = 0$ (*)
- 2) Phương trình (*) gọi là giải ra được đối với đạo hàm nếu (*) chuyển được về dạng:
 $y' = f(x, y)$ hay $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (**)
- 3) Định lý tồn tại nghiệm của phương trình (**)
 Giả sử $f(x, y)$ liên tục trong 1 miền D nào đó trong mặt phẳng Oxy. Xét điểm $(x_0, y_0) \in D$. Khi đó trong một lân cận nào đó của $x = x_0$ tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (**) lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$. Nếu $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ liên tục trong D thì nghiệm ấy là duy nhất.
- 4) Nghiệm tổng quát của phương trình (**) là hàm $y = y(x, c)$. Trong đó c là một hằng số tùy ý, thỏa mãn phương trình (**) với mọi giá trị c . Tổng quát nghiệm tổng quát của (*) là một trong 3 dạng sau:

$$\begin{cases} x = x(y, c) \\ y = y(x, c) \\ g(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

- 5) Điều kiện ban đầu – nghiệm riêng.

Nghiệm của phương trình (**) thỏa mãn điều kiện $y \Big|_{x=x_0} = y_0$

(điều kiện đầu) gọi là nghiệm riêng. Nghiệm riêng tìm được bằng cách tìm hằng số c tương ứng trong nghiệm tổng quát.

- 6) Nghiệm kỳ dị là nghiệm vẫn thỏa mãn phương trình (**) nhưng không thỏa mãn công thức nghiệm tổng quát.

1.2 Một số phương trình vi phân cấp 1 cơ bản:

1.2.1 Phương trình biến số phân ly.

a) Dạng: $f(x)dx + g(y)dy = 0$ (1)

b) Phương pháp: lấy tích phân 2 vế (1)

$$\Leftrightarrow \int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

c) Các ví dụ:

Ví dụ: Giải phương trình: $x^2(y + 1) dx + (x^3 - 1)(y - 1) dy = 0$ (2)

Điều kiện: $y \neq -1, x \neq 1$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^3 - 1} dx + \frac{y-1}{y+1} dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{x^2}{x^3 - 1} dx + \int \frac{y-1}{y+1} dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \ln|x^3 - 1| + y - 2 \ln|y+1| = C \quad (*)$$

Biểu thức (*) gọi là nghiệm tổng quát. Thay $y = -1$ vào (2) thì thoả $\forall x$, thay $x=1$ vào (2) thì suy ra $y=-1$, vậy hàm $y(x) = -1$ được gọi là nghiệm kỳ dị của (2).

Ví dụ: Giải $xy' + y = y^2$ (3) thoả $y|_{x=1} = \frac{1}{2}$

do $y' = \frac{dy}{dx}$ nên (3) $\Leftrightarrow \frac{x \cdot dy}{dx} + y = y^2$ (4)

Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0, y \neq 1$

$$(4) \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2 - y} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y(y-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| + \ln|C_1| \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y} \cdot C_1$$

Để $y|_{x=1} = \frac{1}{2}$ ta có: $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot C_1 \Rightarrow C_1 = -1$ Vậy $x = \frac{1-y}{y}$

1.2.2 Phương trình đẳng cấp.

a) Dạng: $y' = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (2.1)

b) Phương pháp:

- Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$

(2.1) $\Leftrightarrow u + x \cdot u' = \varphi(u)$ (2.2)

- Đưa (2.2) về dạng phương trình biến số phân ly.

c) Các ví dụ:

Ví dụ: Giải phương trình $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ (2.3)

$$\text{Ta có } y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \frac{y}{x}} \quad \text{Đặt } u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$$

$$(2.3) \Leftrightarrow u'x + u = \frac{1+u^2}{2u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} x = \frac{1-u^2}{2u} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2udu}{1-u^2} \quad (u \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{2udu}{1-u^2} \Leftrightarrow \ln|x| + \ln|1-u^2| = \ln|C_1|$$

$$\Leftrightarrow \ln|x(1-u^2)| = \ln|C_1|$$

$$\Leftrightarrow x(1-u^2) = C_1 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = C_1x$$

Nếu $u \equiv \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$ thay vào (2.3). Ta có: $\pm 1 = \pm 1$ nên $y = \pm x$ cũng là nghiệm và nghiệm này không thỏa công thức nghiệm tổng quát (2.3) nên $y = \pm x$ gọi là nghiệm kỳ dị.

Ví dụ: Giải phương trình: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ thỏa $y|_{x=1} = 0$ (2.4)

$$\text{Ta có: } \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}, \text{ Đặt } u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = x u' + u$$

$$(2.4) \Leftrightarrow x u' + u = \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow xdu = \frac{1+u^2}{1-u} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2} du \Leftrightarrow \ln|x| = \arctgu - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| + \ln\sqrt{1+u^2} = \arctgu + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| \sqrt{1+u^2} = \arctgu + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot \sqrt{1+u^2} = e^{\arctgu} C \Leftrightarrow |x| \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|} = e^{\arctgu} C$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = e^{\arctg \frac{y}{x}} C \quad \text{Do } x=1, y=0 \Leftrightarrow c=1$$

Vậy phương trình có nghiệm riêng $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\arctg \frac{y}{x}} \Leftrightarrow r = e^\varphi$

Chú ý: Việc đặt trực tiếp $y = ux$ không phải lúc nào cũng đưa được về phương trình phân ly.

+ Một số phương pháp đổi biến.

Dạng 1: $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$

• Đặt $x = X + a, y = Y + b$

Ví dụ: $(x - y + 1)dx + (x + y + 3) dy = 0$ (1)

Đặt $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-x-1}{x+y+3} \Leftrightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{Y-X+b-a-1}{X+Y+a+b+3}$ (2)

Để phương trình (2) có dạng đẳng cấp thì cần chọn a, b:

$$\begin{cases} b-a-1=0 \\ a+b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}$, đây là phương trình đẳng cấp (3)

Giải (3) ta được nghiệm tổng quát là. $Y^2 + 2XY - X^2 = C^2$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là:

$$(y + 1)^2 + 2(x + 2)(y + 1) - (x + 2)^2 = C^2$$

Dạng 2: Chuyển sang tọa độ cực: $r = r(\varphi)$. Đặt $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

Khi đó: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cdot \cos \varphi - r \sin \varphi} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$ (4)

Ví dụ: Giải phương trình $2(x + y y')^2 = y^2(1 + y'^2)$ (1)

Đặt $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, thay vào (1) ta có:

$$r^2 \cdot r'^2 \sin^2 \varphi + r^4 \cdot \sin^2 \varphi = 2r^2 \cdot r'^2$$

Do đó $r' = \pm r \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} \Leftrightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \pm r \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{r} = \pm \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} d\varphi \Leftrightarrow |r| = C_1 \ln \left(\sqrt{1 + \cos^2 \varphi} \pm \cos \varphi \right)$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1): $\sqrt{x^2 + y^2} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} = cx + \sqrt{2x^2 + y^2}$

1.2.3 Phương trình tuyến tính cấp 1

a) Dạng: $y' + p(x)y = q(x)$ (1)

$q(x)=0, y' + p(x)y = 0$ phương trình thuần nhất (PTTN) (2)

b) Phương pháp:

+ Tìm: $A(x) = e^{-\int p(x)dx} = \exp\left(\int_{t=a}^{t=x} -p(t)dt\right)$ một nghiệm riêng của (2).

$$+ \text{Tìm: } B(x) = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx = \int_{s=a}^{s=x} q(s) \exp \left(\int_{u=a}^{u=s} p(u) du \right) ds$$

Khi đó nghiệm của phương trình (1) là $y = [B(x) + K] A(x)$

(K là hằng số). Thật vậy:

$$\text{Từ } y' + py = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -p \Rightarrow \ln|y| = \int -p dx + k$$

$\Rightarrow |y| = \exp(\int -p dx + k) \Rightarrow y = c \cdot \exp(\int -p dx)$, bây giờ ta dùng **phương pháp biến thiên hằng số**, nghĩa là xem $c=c(x)$ biến thiên theo x .

Ta có: $y = c(x) \cdot \exp(\int -p dx)$ đây là nghiệm tổng quát của (1), ta sẽ tìm $c(x)$ bằng cách lấy đạo hàm theo x và sau đó thế vào (1) như sau:

$$y' = c(x) \cdot (-p) \exp(\int -p dx) + c'(x) \cdot \exp(\int -p dx) \text{ hay}$$

$$y' = \underbrace{-p \cdot c(x) \exp(\int -p dx)}_y + c'(x) \cdot \exp(\int -p dx) \text{ vậy:}$$

$$y' + py = c'(x) \cdot \exp(\int -p dx) = q \Rightarrow c'(x) = q \exp(\int p dx)$$

$$\Rightarrow c(x) = \int [q \exp(\int p dx)] dx \text{ Cuối cùng:}$$

$$y = c \exp(\int -p dx) = \left\{ \int [q \exp(\int p dx)] dx \right\} \exp(\int -p dx) = [B(x) + K] A(x)$$

c) Các ví dụ:

Ví dụ: Giải phương trình $y' + \frac{1}{x}y = 3x$ (1).

Tìm nghiệm riêng thỏa $y \Big|_{x=1} = 1$

$$\text{Ta có: } A(x) = e^{-\int p(x) dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|+k} = e^{\ln|x|^{-1}+k} = \frac{1}{x}$$

(chỉ cần lấy một giá trị tích phân đơn giản nhất (một nghiệm riêng), vì ta sẽ dồn hết các hằng số ở bước cuối cùng)

$$B(x) = \int q(x) \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} dx = \int 3x \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} dx = \int 3x^2 dx = x^3 + K$$

$$\text{Vậy phương trình (1) có nghiệm } y = (x^3 + K) \frac{1}{x}$$

$$\text{Nghiệm riêng thỏa } y \Big|_{x=1} = 1 \Leftrightarrow K = 0. \text{ Vậy } y = x^2$$

Chú ý: Chúng ta có thể quan niệm $x(y)$ là ẩn cần tìm.

Ví dụ: $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$ (1)

Nếu ta coi $y(x)$ là ẩn thì phương trình này không có dạng tuyến tính cấp 1 nhưng nếu coi $x(y)$ là ẩn thì:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3x}{y} = -\frac{y}{2} \Leftrightarrow x' - \frac{3}{y} \cdot x = \frac{y}{2}$$

là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ta có một NR của PTTN: $A(y) = e^{\int \frac{3}{y} dy} = e^{3 \cdot \ln|y|} = e^{\ln|y|^3} = y^3$

$$B(y) = \int \frac{y}{2} \cdot e^{-\int \frac{3}{y} dy} dy = \int \frac{y}{2} \cdot e^{\ln y^{-3}} dy = \int \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} = \frac{-1}{2y}$$

Vậy NTQ của ptvp là: $x = \left(\frac{-1}{2y} + K \right) y^3 = \frac{-y^2}{2} + ky^3$

1.2.4 Phương trình Bernoulli:

a) Dạng: $y' + p(x)y = q(x) y^\alpha$ (*)

Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ khi đó (*) là phương trình phương trình tuyến tính cấp 1. Như vậy ta xét: $\alpha \neq 0, 1$. Nếu $p(x)=q(x)=1$, đó là phương trình biến phân ly.

b) Phương pháp:

+ Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1 - \alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$, nhân 2 vế của (*) với $(1 - \alpha) y^{-\alpha}$

+ (*) $\Leftrightarrow z' + (1 - \alpha) p(x)z = (1 - \alpha) q(x)$ (**)

(**) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

c) Các ví dụ:

Ví dụ 1: $y' - 2xy = x^3 y^2$ (1)

Điều kiện: $y \neq 0$. Đặt $z = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2} y'$

$\Rightarrow y' = -z' y^2$

(1) $\Leftrightarrow z' + 2xz = -x^3$

$A(x) = e^{-\int 2x dx} = e^{-x^2}$

$B(x) = \int -x^3 \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}(1-x^2) e^{x^2}$

Vậy $z(x) = \left[\frac{1}{2}(1-x^2) e^{x^2} + K \right] e^{-x^2} = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}(1-x^2) + Ke^{-x^2} \right] = \frac{1}{y}$

$y = 0$ cũng là nghiệm và đây là nghiệm kỳ dị.

Chú ý:

Chúng ta cũng có thể quan niệm $x=x(y)$ là ẩn để đưa về dạng phương trình Bernoulli.

Ví dụ 2: $\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1 \Leftrightarrow x^2y^3 + xy = \frac{dx}{dy}$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3 \quad \Leftrightarrow x' - xy = x^2y^3 \quad (3)$$

Đặt $z = x^{-1}$ (3) $\Leftrightarrow z' + yz = -y^3$

$$A(y) = e^{-\int y dy} = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$B(y) = \int -y^3 \cdot e^{\int y dy} dy = -\int y^3 e^{\frac{y^2}{2}} dy = -y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$\text{Vậy } z = \left[\left(-y^2 + 2 \right) e^{\frac{y^2}{2}} + K \right] e^{-\frac{y^2}{2}} = 2 - y^2 + K \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 2 - y^2 + ke^{-\frac{y^2}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2 - y^2 + ke^{-\frac{y^2}{2}}}$$

$$\text{Thử lại: } \frac{dx}{dy} = \frac{y \left(2 + ke^{-\frac{y^2}{2}} \right)}{\left(2 - y^2 + ke^{-\frac{y^2}{2}} \right)^2} = x^2 y^3 + xy$$

1.2.5 Phương trình vi phân toàn phần:

Dạng: $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$

Trong đó $P(x, y)$, $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đơn liên D thỏa mãn điều

kiện: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Phương pháp:

+ Tìm hàm $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y) \Rightarrow u(x, y) = \int p(x, y) dx + c(y)$$

+ Tìm $c(y)$: từ phương trình $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, hay

$$u'_y = \int p'_y(x, y) dx + c'(y) = Q(x, y)$$

Khi đó $u(x, y) = C$ gọi là nghiệm tổng quát

Ví dụ: Giải phương trình $(x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy = 0$

$$\text{Ta có } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (x + y + 1)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (x - y^2 + 3)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y) = x + y + 1$$

$$\Rightarrow u = \int (x + y + 1) dx = \frac{x^2}{2} + yx + x + c(y)$$

$$\left(u'_y = \int p'_y(x, y) dx + c'(y) = \int 1 dx + c'(y) = x + c'(y) \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + c'(y) = Q(x, y) = x - y^2 + 3$$

$$\Rightarrow c'(y) = -y^2 + 3 \Rightarrow c(y) = \int (-y^2 + 3) dy = -\frac{y^3}{3} + 3y$$

$$\text{Vậy nghiệm: } u(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{y^3}{3} + 3y = C_1$$

BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP II

2.1 Các khái niệm:

- 1) Dạng tổng quát $F(x, y, y', y'') = 0$ (*)
- 2) Nếu biến đổi (*) được về dạng $y'' = f(x, y, y')$, gọi là giải ra được đối với đạo hàm cấp cao.
- 3) Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là hàm số $y = y(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn đẳng thức (*).

Tổng quát nghiệm tổng quát của (*) là một trong 3 dạng:

$$\begin{cases} x = x(y, c_1, c_2) \\ y = y(x, c_1, c_2) \\ g(x, y, c_1, c_2) = 0 \end{cases}$$

- 4) Nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$

gọi là nghiệm riêng

- 5) Định lý tồn tại nghiệm (duy nhất) của phương trình (*)

Nếu $f(x, y, y')$ liên tục trong một miền chứa (x_0, y_0, y'_0) thì tồn tại một nghiệm $y = y(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

Ngoài ra nếu $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục thì nghiệm đó duy nhất.

2.2 Các phương trình cơ bản:

2.2.1 Phương trình khuyết y, y' a) Dạng: $y'' = f(x)$ b) Phương pháp: Tích phân 2 lần ta có nghiệm tổng quát

$$y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2$$

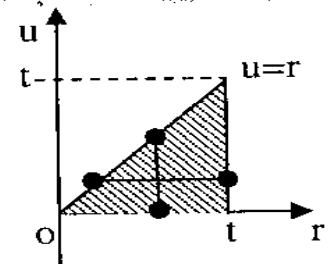
c) Các ví dụ:Ví dụ: Giải $y'' = e^{2x}$

$$y' = \int y'' dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1$$

Vậy nghiệm tổng quát $y = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2$ Ví dụ: $y''(t) = v(t)$, hãy chứng minh: $y(t) = \int_0^t (t-u)v(u) du + c_1 t + c_2$

Thật vậy, ta có ngay:

$$y''(t) = v(t) \Rightarrow y'(t) = \int_0^t v(u) du + c_1 = \underbrace{g(t)} + c_1$$



Tiếp tục lấy tích phân lần nữa, ta có:

$$y(t) = \int_0^t g(r) dr + c_1 t + c_2, \text{ đặt: } I = \int_{r=0}^{r=t} g(r) dr = \int_{r=0}^{r=t} \left(\int_{u=0}^{u=r} v(u) du \right) dr =$$

$$= \int_{u=0}^{u=t} \left(\int_{r=u}^{r=t} v(u) dr \right) du = \int_{u=0}^{u=t} (t-u)v(u) du$$

Vậy $y(t) = \int_0^t (t-u)v(u) du + c_1 t + c_2$, thử lại: $y''(t) = v(t)$, ta dùng:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} K(u,t) du \right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K(u,t)}{\partial t} du + K\{b(t),t\} \frac{db}{dt} - K\{a(t),t\} \frac{da}{dt}$$

Thử lấy lại ví dụ trên $y'' = e^{2x} \Rightarrow y(t) = \int_0^t (t-u)e^{2u} du + c_1 t + c_2 =$

$$= \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + c_1 t + c_2 = \frac{e^{2t}}{4} + b_1 t + b_2 \quad \blacksquare$$

2.2.2 Phương trình khuyết y a) Dạng: $y'' = f(x, y')$ b) Phương pháp:

+ Đưa về phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 bằng cách

đặt $p = y'$
 $+ y'' = \frac{dp}{dx}$

c) Ví dụ: Giải phương trình $y'' = x - \frac{y'}{x}$ (1)

Đặt $y' = p$ (1) $\Leftrightarrow p' + \frac{p}{x} = x$ (2)

Nghiệm tổng quát của phương trình (2): $p = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$

$\Rightarrow y = \int p(x)dx = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2$

2.2.3 Phương trình khuyết x.

Dạng: $y'' = f(y, y')$

Phương pháp: Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$

đưa về phương trình biến phân ly.

Ví dụ: Giải phương trình $2y y'' = y'^2 + 1$ (3)

Đặt $y' = p = p(x) \Rightarrow y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

(3) $\Leftrightarrow 2yp \frac{dp}{dy} = p^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2p dp}{p^2 + 1}$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln(1 + p^2) + \ln|C_1|$

$\Leftrightarrow y = C_1(1 + p^2)$ (*)

Tìm p: Ta có $p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{p}$ (**)

ta sẽ khử dy và y trong quan hệ (**) nhờ quan hệ (*), để tìm $p = p(x)$.

Từ (*) ta có $dy = 2pC_1 dp \Rightarrow \frac{dy}{p} = 2C_1 dp$

$\Rightarrow dx = 2C_1 dp \Rightarrow dp = \frac{dx}{2C_1} \Rightarrow p = \frac{x}{2C_1} + C_2$

Vậy $y = C_1 \left[1 + \left(\frac{x}{2C_1} + C_2 \right)^2 \right]$ là nghiệm tổng quát.

Đúng ra, nghiệm giải ra ta phải thử lại xem có thỏa đúng ptvf ban đầu, nhưng phần này dành cho sv tự làm.

2.3 Phương trình Tuyến tính cấp hai tổng quát:

Dạng tổng quát:

$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ (1)

Nếu $f(x) \neq 0$ gọi là phương trình không thuần nhất (PTKTN).

Nếu $f(x) \equiv 0$ gọi là phương trình thuần nhất (PTTN) tương ứng với (1).

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (2)$$

Định lý 1:

Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiêm riêng (NR) của (2) độc lập tuyến tính

(ĐLTT) nghĩa là $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$, thì $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ là nghiêm tổng

quát (NTQ) của (2), với c_1, c_2 là hai hằng số.

Vấn đề tìm một nghiệm riêng của (2), hiện nay chưa có phương pháp tổng quát.

Định lý 2:

Nếu $y_1(x)$ là nghiệm riêng của (2), thì một nghiệm riêng $y_2(x)$ ĐLTT của (2) sẽ được tìm dưới dạng $y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x)$.

Định lý 3:

Nghiêm tổng quát của (1) là tổng một nghiệm riêng của (1) và một nghiệm tổng quát của (2).

Định lý 4 (phương pháp biến thiên hằng số Lagrange):

Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm riêng của (2) ĐLTT, thì nghiệm tổng quát của (1) được tìm dưới dạng $c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$. Trong đó $c_1(x)$, $c_2(x)$ là hai hàm số thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}, \text{ trong đó định thức } \Delta(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ gọi là}$$

định thức Wronsky.

Do $y_1(x)$, $y_2(x)$ là ĐLTT nên $\Delta \neq 0$, và ta tìm được:

$$\begin{cases} c_1' = \varphi_1(x) \rightarrow c_1 = \int \varphi_1 dx + k_1 \\ c_2' = \varphi_2(x) \rightarrow c_2 = \int \varphi_2 dx + k_2 \end{cases}$$

Lúc này nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = k_1 y_1 + k_2 y_2 + y_1 \int \varphi_1 dx + y_2 \int \varphi_2 dx$$

chứa 2 hằng số tích phân k_1, k_2 .

Ngoài ra định thức Wronsky $\Delta(x)$ còn thỏa mãn PTVP

$$\Delta'(x) = -a_1(x) \cdot \Delta(x) \text{ và có nghiệm là: } \Delta(x) = \Delta(0) e^{\left(\int_{t=0}^{t=x} -a_1(t) dt \right)}$$

$$\text{Thật vậy: } \Delta' = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Nhân 2 phương trình (2) với y_1, y_2 rồi trừ cho nhau:

$$y_1 \parallel y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0 (*)$$

$$-y_2 \parallel y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 (**), \text{ trừ hai vế cho nhau, suy ra đpcm}$$

Định lý 5: (chồng chất nghiệm). Cho hệ ptvp sau:

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x) & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x) & (5) \end{cases}$$

Nếu NR của (3) là $g_1(x)$, NR của (4) là $g_2(x)$, thì NR của (5) là:

$$g_1(x) + g_2(x).$$

Chú ý: Năm định lý trên vẫn đúng cho phương trình tuyến tính cấp một

như ta đã làm ở trên, thật vậy:
$$\begin{cases} y' + py = q & (1) \\ y' + py = 0 & (2) \end{cases}$$

NR của (2) là:
$$y_1(x) = \exp\left(\int -p dx\right) \neq 0, \forall x$$

==> NR của (1) là:
$$y = c(x) \cdot y_1(x) = c(x) \cdot \exp\left(\int -p dx\right)$$

ta sẽ tìm $c(x)$ bằng **phương pháp biến thiên hằng số**, trong quá trình chứng minh ở trên ta đã có: $c'(x) \cdot \exp\left(\int -p dx\right) = q \Leftrightarrow c'(x) \cdot y_1(x) = q$.

Điều này tương tự như định lý 4, ở đây $\Delta(x) = y_1(x) \neq 0$

Ta có thể thử lại $y = c(x) \cdot y_1(x)$ và thoả $c'(x) \cdot y_1(x) = q$ là một NR của (1), bằng cách lấy đạo hàm trực tiếp và thế vào (1).

2.4 Phương trình tuyến tính với hệ số hằng số:

Áp dụng 5 định lý trên vào phần này, nhưng trước tiên ta giải phương trình thuần nhất

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (3)$$

Ta cần tìm NR của (3) dưới dạng $y = e^{kx}$, k cần tìm ?, lấy đạo hàm và thế vào (3) ta có:

$$e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0 \Leftrightarrow (k^2 + a_1 k + a_2) = 0 \quad (4)$$

Đây gọi là phương trình đặc trưng (PTĐT) của (3). Có 3 trường hợp sau:

- Nếu (4) có 2 nghiệm thực phân biệt k_1, k_2 . Vậy 2 NR ĐLTT của (3) là $y_1 = e^{k_1 x}$ và $y_2 = e^{k_2 x}$, do đó NTQ của (3) là

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

- Nếu (4) có 2 nghiệm thực kép $k_1 = k_2 = k$. Gọi $y_1 = e^{k_1 x}$ là một NR của (3), ta tìm một NR nữa ĐLTT với y_1 có dạng $y_2 = y_1 \cdot u(x)$. Bây giờ lấy đạo hàm và thế vào (3) ta có:

$$e^{k_1 x} \left[u'' + (2k_1 + a_1)u' + (k_1^2 + a_1 k_1 + a_2)u \right] = 0, \text{ chú ý số hạng thứ}$$

hai và thứ ba triệt tiêu do k_1 là nghiệm kép, vậy cuối cùng ta có: $e^{k_1 x} u'' = 0 \Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = Ax + B = x$, do chỉ cần tìm một NR của (3) nên ta chọn $A=1, B=0$. Vậy một NR của (3) là:

$$y = y_1 \cdot u = x e^{k_1 x}, \text{ từ đây ta có NTQ của (3) là:}$$

$$\boxed{y = c_1 e^{k x} + c_2 x e^{k x}}.$$

- Nếu (4) có 2 nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, thì 2 NR, ĐLTT của

$$(3) \text{ là: } \begin{cases} y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = \overline{y_1} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } u_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad u_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

(phần thực và phần ảo) cũng là 2 NR ĐLTT của (3).

Nên NTQ của (3) là:

$$\boxed{y = c_1 u_1 + c_2 u_2 = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x}.$$

Ta cũng có thể lý luận: N^0 tổng quát của (3) là: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \in \mathbb{R}$,

với $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ là 2 số phức liên hợp, tức $c_1 = \overline{c_2}$, thực vậy:

$$\begin{aligned} \text{Vì } y = \overline{y} \in \mathbb{R}, \text{ nên } y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \overline{y} = \overline{c_1 y_1 + c_2 y_2} = \overline{c_1} \overline{y_1} + \overline{c_2} \overline{y_2} = \\ = \overline{c_1} y_2 + \overline{c_2} y_1. \text{ Vậy } c_1 y_1 + c_2 y_2 = \overline{c_1} y_2 + \overline{c_2} y_1, \text{ suy ra } \overline{c_1} = c_2 \text{ và } \\ \overline{c_2} = c_1. \text{ Vậy nghiệm tổng quát:} \end{aligned}$$

$$y = c_1 y_1 + \overline{c_1} y_2 = 2 \operatorname{Re}(c_1 y_1) = 2 \operatorname{Re} \left[(a + ib) e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \right]$$

$$= 2e^{\alpha x} (a \cos \beta x - b \sin \beta x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x), \text{ trong đó:}$$

$$c_1 = 2a, \quad c_2 = -2b$$

- Bây giờ xét PTKTN

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (5)$$

ta lại áp dụng Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange:

– Nghiệm của phương trình $y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$

– y_1, y_2 tìm như các phần trên.

$$\text{– Tìm } C_1(x), C_2(x) \text{ bằng cách giải: } \begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

2.5 Các ví dụ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $y'' - 3y' + 5y = 0$

- Phương trình đặc trưng: $k^2 - 3k + 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$

NTQ là: $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2 e^{\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $y'' + y = \text{tg}x$ (*)

- Phương trình thuần nhất: $y'' + y = 0$
- Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i$
- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Ta có
$$\begin{cases} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \cdot \sin x = 0 \\ -c_1'(x) \cdot \sin x + c_2'(x) \cdot \cos x = \text{tg}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -\text{tg}x \cdot \sin x \\ c_2'(x) = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$c_1(x) = \int -\text{tg}x \sin x dx = \sin x - \ln \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + K_1$

$c_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + K_2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (*)

$$y = \left[\sin x - \ln \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + K_1 \right] \cos x + (-\cos x + K_2) \sin x$$

$$= K_1 \cos x + K_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \cdot \ln(x)$

- Phương trình thuần nhất: $y'' + 4y' + 4y = 0$
- Phương trình đặc trưng: $k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -2$, nghiệm kép.
- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

- Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất thoả phương trình Wronski:

$$\begin{cases} e^{-2x} c_1' + x e^{-2x} c_2' = 0 \\ -2e^{-2x} c_1' + (-2x e^{-2x} + e^{-2x}) c_2' = e^{-2x} \ln(x) \end{cases}, \text{ đơn giản } e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' + x c_2' = 0 \\ -2c_1' + (1 - 2x) c_2' = \ln(x) \end{cases}, \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1 - 2x \end{vmatrix} = 1$$

$$c_1' = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \ln(x) & 1-2x \end{vmatrix} = -x \ln(x), \quad c_2' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \ln(x) \end{vmatrix} = \ln(x)$$

$$c_1 = -\int \ln(x) x dx = -\int u dv = -\frac{x^2}{2} \ln(x) + \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx + k_1 =$$

$$= -\frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{4} + k_1, \text{ tương tự } c_2 = x \ln(x) - x + k_2,$$

$$\text{Vậy } y = \left(-\frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{4} + k_1 \right) e^{-2x} + \left(x \ln(x) - x + k_2 \right) x e^{-2x}$$

$$\text{hay } y = \left(\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{3x^2}{4} + k_1 + k_2 x \right) e^{-2x}$$

Ví dụ 4: $y'' + 3y' + 2y = e^{3x} (2x+1)$ (A)

- Phương trình thuần nhất: $y'' + 3y' + 2y = 0$
- Phương trình đặc trưng: $k^2 + 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -1, -2$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$
- Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất thoả phương

$$\text{trình Wronski: } \begin{cases} e^{-2x} c_1' + e^{-x} c_2' = 0 \\ -2e^{-2x} c_1' + (-e^{-x}) c_2' = e^{3x} (2x+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' + x c_2' = 0 \\ -2c_1' + (1-2x)c_2' = \ln(x) \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-3x}$$

$$c_1' = \frac{1}{e^{-3x}} \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{3x}(2x+1) & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{5x} (2x+1),$$

$$c_2' = \frac{1}{e^{-3x}} \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & e^{3x}(2x+1) \end{vmatrix} = e^{4x} (2x+1)$$

$$c_1 = \int -e^{5x} (2x+1) dx = e^{5x} \left(\frac{-2x}{5} - \frac{3}{25} \right) + k_1$$

$$c_2 = \int e^{4x} (2x+1) dx = e^{4x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8} \right) + k_2$$

$$\text{NTQ của (A): } y = e^{3x} \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{200} \right) + k_1 e^{-2x} + k_2 e^{-x}$$

Ví dụ 5: $y'' + y = \cos^3 x$ (A)

- Phương trình thuần nhất: $y'' + y = 0$

- Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -i, i$.
- Nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất là: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
- Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất thoả phương

trình Wronski:
$$\begin{cases} \cos x c_1' + \sin x c_2' = 0 \\ -\sin x c_1' + \cos x c_2' = \cos^3 x \end{cases}, \Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$c_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos^3 x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cos^3 x, \quad c_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cos^3 x \end{vmatrix} = \cos^4 x$$

$$c_1 = \int -\sin x \cos^3 x dx = \frac{1}{4} \cos^4 x + k_1$$

$$c_2 = \int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \sin x \cos^4 x + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{8} + k_2. \text{ NTQ của (A):}$$

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{4} \cos^4 x + k_1 \right) \cos x + \left(\frac{1}{4} \sin x \cos^4 x + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{8} + k_2 \right) \sin x \\ &= \frac{-1}{32} \cos 3x + \frac{3}{8} x \sin x + \frac{9}{32} \cos x + k_1 \cos x + k_2 \sin x \\ &= \frac{-1}{32} \cos 3x + \frac{3}{8} x \sin x + k_1' \cos x + k_2' \sin x \end{aligned}$$

2.6 Vài dạng đặc biệt- phương pháp hệ số bất định

Với một vài dạng $f(x)$ trong vế phải của PTKTN

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_2 y = f(x) \quad (1)$$

Nếu giải theo phương pháp tổng quát của phương pháp biến thiên hằng số, dùng định thức Wronsky đôi khi rất phức tạp, trong khi đó dáng dấp nghiệm riêng của (1) rất giống với dáng dấp của vế phải $f(x)$. Do đó người ta thống kê một số dạng của $f(x)$ để tìm nghiệm riêng của (1) tương đối dễ dàng hơn mà không phải dùng đến phương pháp định thức Wronsky, vì ta gặp phải các phép tính tích phân tạp. Ở đây ta sẽ bắt gặp một phương pháp hệ số bất định để giải quyết vấn đề này.

Nếu $f(x)$ có các dạng sau:

1. $f(x) = e^{kx} P_n(x)$ với k không là nghiệm của phương trình đặc trưng.

Khi đó (1) có một NR dạng $y_1 = e^{kx} Q_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ và $Q_n(x)$ là hai đa thức cùng bậc n .

- 2.1 $f(x) = e^{kx} P_n(x)$ với k là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng.

Khi đó (1) có một NR dạng $y_1 = x e^{kx} Q_n(x)$,

trong đó $P_n(x)$ và $Q_n(x)$ là hai đa thức cùng bậc n .

2.2 $f(x) = e^{kx} P_n(x)$ với k là nghiệm kép của phương trình đặc trưng. Khi đó (1) có một NR dạng $y_1 = x^2 e^{kx} Q_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ và $Q_n(x)$ là hai đa thức cùng bậc n .

3.1 $f(x) = e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$ với $a \pm ib$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Khi đó (1) có một NR dạng $y_1 = e^{ax} [R(x) \cos bx + S(x) \sin bx]$, trong đó $R(x)$ và $S(x)$ là hai đa thức có bậc $= \max(n, m)$.

3.2 $f(x) = e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$ với $a \pm ib$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng. Khi đó (1) có một NR dạng $y_1 = x e^{ax} [R(x) \cos bx + S(x) \sin bx]$, trong đó $R(x)$ và $S(x)$ là hai đa thức có bậc $= \max(n, m)$

Các hệ số của các đa thức cần tìm, ta sẽ dùng phương pháp hệ số bất định như các ví dụ sau sẽ rõ.

Ngoài ra đối với các phương trình vi phân bậc cao mà có hệ số là hằng số, thì phương pháp phương pháp hệ số bất định vẫn có thể áp dụng được.

2.7 Các ví dụ:

Ví dụ 1.1: Giải phương trình: $y'' + 2y' + 2y = 4x^2$ (A)

♦ Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -1 \pm i$, vậy NTQ của PTTN tương ứng là $\bar{y} = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

♦ $k=0$ không là nghiệm của PTĐT, nên NR của (A) có dạng $y_1 = e^{kx} Q_n(x) = e^{0x} (ax^2 + bx + c)$, vì $f(x)=4x^2$ là bậc 2.

♦ Lấy đạo hàm rồi thế tất cả vào (A) ta có:

$2a + 4ax + 2b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 4x^2$, đồng nhất hệ số hai vế ta có:
(phương pháp hệ số bất định)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=2, b=-4, c=2$$

\Rightarrow NR của (A): $y_1 = (2x^2 - 4x + 2)$

♦ Vậy NTQ của (A):

$$y = y_1 + \bar{y} = (2x^2 - 4x + 2) + e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

Ví dụ 1.2: $y'' + 3y' + 2y = e^{3x} (x^2 + 2x + 6)$ (A)

- ◆ $k=3$ không là nghiệm của PTĐT, nên NR của (A) có dạng $y_1 = e^{kx} Q_n(x) = e^{3x} (ax^2 + bx + c)$, vì $f(x)$ có bậc là 2.

NTQ của (A): $y = e^{3x} \left(\frac{x^2}{20} + \frac{11x}{200} + \frac{1081}{4000} \right) + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$

Ví dụ 1.3: $y'' + 3y' + 2y = e^{3x} (2x + 1)$ (A)

(đã giải theo cách định thức wronsky ở trước)

- ◆ $k=3$ không là nghiệm của PTĐT, nên NK của (A) có dạng $y_1 = e^{kx} Q_n(x) = e^{3x} (ax + b)$, vì $f(x)$ có bậc là 1.

NTQ của (A): $y = e^{3x} \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{200} \right) + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$

Ví dụ 1.4: $y'' + 3y' + 2y = 6e^{3x}$ (A)

- ◆ $k=3$ không là nghiệm của PTĐT, nên NR của (A) có dạng $y_1 = e^{kx} Q_n(x) = ae^{3x}$, vì $f(x)$ có bậc là 0.

NTQ của (A): $y = e^{3x} \left(\frac{3}{10} \right) + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$

Ví dụ 2.1.1: Giải phương trình: $y'' + 3y' - 18y = e^{3x} (2x + 1)$ (A)

- ◆ Phương trình đặc trưng $k^2 + 3k - 18 = 0 \Leftrightarrow k = 3, -6$, vậy NTQ của PTTN tương ứng là $\bar{y} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-6x}$.

- ◆ $k=3$ là nghiệm đơn của PTĐT, nên NR của (A) có dạng $y_1 = xe^{kx} Q_n(x) = xe^{3x} (ax + b)$, vì $f(x)$ có bậc là 1.

- ◆ Lấy đạo hàm rồi thế tất cả vào (A), rồi đơn giản cho e^{3x} ta có: $18ax + 2a + 9c = 2x + 1$, đồng nhất hệ số hai vế ta có: (phương pháp hệ số bất định)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18a = 2 \\ 2a + 9b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 9/81, b = 7/81$$

\Rightarrow NR của (A): $y_1 = \frac{1}{81} (9x^2 + 7x) e^{3x}$

- ◆ Vậy NTQ của (A):

$$y = y_1 + \bar{y} = \frac{1}{81} (9x^2 + 7x) e^{3x} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-6x}$$

Ví dụ 2.1.2: $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} (2x + 1)$ (A)

- ♦ $k=3$ là nghiệm kép của PTĐT, nên NR của (A) có dạng

$$y_1 = x^2 e^{kx} Q_n(x) = x^2 e^{3x} (ax + b), \text{ vì } f(x) \text{ có bậc là } 1.$$

$$\text{NTQ của (A): } y = e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \right) + c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

Ví dụ 2.2.1: Giải phương trình: $y'' + 6y' + 9y = 6e^{-3x}$ (A)

- ♦ Phương trình đặc trưng $k^2 + 6k + 9 = 0 \Leftrightarrow k = -3$ (kép), vậy NTQ của PTTN tương ứng là $\bar{y} = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$.
- ♦ $k = -3$ là nghiệm kép của PTĐT, nên NR của (A) có dạng $y_1 = x^2 e^{kx} Q_n(x) = x^2 e^{-3x} (a) = ax^2 e^{-3x}$, vì $f(x)$ có bậc là 0.
- ♦ Lấy đạo hàm rồi thế tất cả vào (A), rồi đơn giản cho e^{-3x} , đồng nhất hệ số hai vế ta có: (phương pháp hệ số bất định). Ta có: $=3$,
 \Rightarrow NR của (A): $y_1 = 3x^2 e^{-3x}$

- ♦ Vậy NTQ của (A):

$$y = y_1 + \bar{y} = 3x^2 e^{-3x} + c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$$

Ví dụ 2.2.2: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} (x^2 + 2x + 6)$ (A)

- ♦ $k = 2$ là nghiệm kép của PTĐT, nên NR của (A) có dạng $y_1 = x^2 e^{kx} Q_n(x) = x^2 e^{2x} (ax^2 + bx + c)$, vì $f(x)$ có bậc là 2.

$$\text{NTQ của (A): } y = e^{2x} \left(\frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{1} \right) + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

Ví dụ 3.2.1: Giải: $y''' - 3y' + 2y = e^{-x} (4x^2 + 4x - 10)$ (A)

- ♦ Phương trình đặc trưng $k^3 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 1, k_3 = -2$,
vậy NTQ của PTTN tương ứng là $\bar{y} = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}$.
- ♦ VP = $e^{-x} (4x^2 + 4x - 10) \Rightarrow a = -1, b = 0$, vậy $a \pm ib = -1$,
 $f(x)$ có bậc là 2.
- ♦ $a \pm ib = -1$ không là nghiệm của PTĐT, nên NR của (A) có dạng $y_1 = e^{ax} [R(x) \cos bx + S(x) \sin bx] = e^{-x} (ax^2 + bx + c)$
- ♦ Lấy đạo hàm rồi thế tất cả vào (A), ta có:
 $4ax^2 + 4bx - 6a + 4c = 4x^2 + 4x - 10$,
đồng nhất hệ số hai vế, ta có: $a = 1, b = 1, c = -1$.

\implies NR của (A): $y_1 = e^{-x}(x^2 + x - 1)$

- ♦ Vậy NTQ của (A):

$$y = y_1 + \bar{y} = e^{-x}(x^2 + x - 1) + c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}$$

Ví dụ 3.2.2: Giải phương trình: $y'' + y = 4x \sin x$ (A)

- ♦ Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$, vậy NTQ của PTTN tương ứng là $\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

- ♦ VP = $(4x) \sin x \implies a = 0, b = 1$, vậy $a \pm ib = \pm i$, $f(x)$ có bậc là 1.

- ♦ $a \pm ib = \pm i$ là nghiệm của PTĐT, nên NR của (A) có dạng

$$y_1 = x e^{ax} [R(x) \cos bx + S(x) \sin bx] = x [(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x]$$

- ♦ Lấy đạo hàm rồi thế tất cả vào (A), ta có:

$$2cx \cos x + (a + d) \cos x - 2ax \sin x + (c - b) \sin x = 2x \sin x,$$

đồng nhất hệ số hai vế, ta có: $a = -1, b = 0, c = 0, d = 1$.

\implies NR của (A): $y_1 = x(\sin x - x \cos x)$

- ♦ Vậy NTQ của (A):

$$y = y_1 + \bar{y} = x(\sin x - x \cos x) + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Ví dụ 3.2.3: Giải phương trình: $y'' + y = \cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$ (A)

(đã giải theo cách định thức wronsky ở trước)

- ♦ Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$, vậy NTQ của PTTN tương ứng là $\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Phân tích vế phải thành 2 phần.

1. $y'' + y = \frac{3}{4} \cos x$ (E)

- ♦ VP = $\frac{3}{4} \cos x \implies a = 0, b = 1$, vậy $a \pm ib = \pm i$, $f(x)$ có bậc là 0.

- ♦ $a \pm ib = \pm i$ là nghiệm của PTĐT, nên NR của (E) có dạng

$$y_1 = x e^{ax} [R(x) \cos bx + S(x) \sin bx] = x [a \cos x + c \sin x]$$

- ♦ Lấy đạo hàm rồi thế tất cả vào (E), ta có:

$$2c \cos x - 2a \sin x = \frac{3}{4} \cos x,$$

đồng nhất hệ số hai vế, ta có: $a = 0, c = \frac{3}{8}$.

\implies NR của (E): $y_1 = \frac{3}{8} x \sin x$

2. $y'' + y = \frac{1}{4} \cos 3x$ (F)

- ♦ VP= $\frac{1}{4} \cos 3x \implies a=0, b=3$, vậy $a \pm ib = \pm 3i$, $f(x)$ có bậc là 0.
- ♦ $a \pm ib = \pm 3i$ không là nghiệm của PTĐT, nên NR của (F) có dạng $y_1 = e^{0x} [R(x) \cos bx + S(x) \sin bx] = [a \cos 3x + b \sin 3x]$
- ♦ Lấy đạo hàm rồi thế tất cả vào (F), ta có:

$$-8a \cos 3x - 8b \sin 3x = \frac{1}{4} \cos 3x,$$
 đồng nhất hệ số hai vế, ta có: $a = \frac{-1}{32}, b=0$.
 \implies NR của (F): $y_2 = \frac{-1}{32} \cos 3x$
- 3. Vậy NR của (A): $y_3 = y_1 + y_2 = \frac{3}{8} x \sin x - \frac{1}{32} \cos 3x$ (ta chấp nhận nguyên lý chồng chất nghiệm).
- 4. Vậy NTQ của (A):

$$y = y_3 + \bar{y} = \left(\frac{3}{8} x \sin x - \frac{1}{32} \cos 3x \right) + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

BÀI TẬP

1. Giải phương trình:
 - a) $y' = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$
 - b) $y' = \frac{\ln x}{x}$
2. Phương trình có biến phân ly
 - a) $x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0$
 - b) $x(1+y^2)^2 dx + y(1+x^2)dy = 0$
 - c) $(x^2 - yx^2) y' + y^2 + xy^2 = 0$
 - d) $dx = \sqrt{1-y^2} dy = 0 \quad y|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$
 - e) $xy' + \dot{y} = y^2 \quad y|_{x=1} = 0,5$
 - f) $x \cdot \sqrt{1+y^2} dx + y \sqrt{1+x^2} dy = 0 \quad y|_{x=0} = 1$.
3. Phương trình đẳng cấp:
 - a) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$
 - b) $x y' = y - x e^{\frac{y}{x}}$
 - c) $y' = \frac{-x-y}{x-y+4}$
 - d) $y dx = x dy - \sqrt{x^2 + y^2} dx$
 - e) $(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)x y' = 0$
 - f) $y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2$

4. Phương trình tuyến tính cấp 1

- a) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ b) $y' - y \sin x = \sin x \cdot \cos x$
 c) $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$ d) $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y|_{x=e} = \frac{e^2}{2}$
 e) $(x^3 + x)y' + 3x^2y = \sqrt{x^2 + 1}$
 f) $(1 + y^2)dx + y \cdot x \cdot dy = dy$ thỏa $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$
 g) $(1 + y^2)dx - 2x dy = (1 + y^2)^2 dy$

5. Phương trình Bernoulli:

- a) $y' + 2xy = 2x^3y^3$ b) $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y}, y|_{x=0} = 9/4$
 c) $y' + 2y = y^2 e^x$ d) $(x + 1)(y' + y^2) = -y$
 e) $3x dy = y(1 + x \cdot \sin x - 3y^2 \sin x) dx$
 f) $xy^2 \cdot y' = x^2 + y^3$
 g) $y^2 dx - (xy + x^3) dy = 0$

6. Phương trình vi phân toàn phần

- a) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$
 b) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$
 c) $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right] dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right] dy = 0$
 d) $\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$

7. Giải phương trình vi phân khuyết

- a) $y'' - 2y' = 0$ b) $x^2 y'' = y'^2$
 c) $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0$ d) $y'' = \frac{y'}{x} + x$
 e) $y'' = ye^y$ f) $y'^2 + 2y y'' = 0$
 g) $y'' - \frac{y'}{x-1} - x(x-1) = 0$ thỏa $y|_{x=2} = 1, y'|_{x=2} = -1$
 h) $y'' + 2y'(1 - 2y) = 0$ thỏa $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$
 k) $x y'' - y' = x^2 \ln x$ thỏa $y|_{x=1} = -\frac{4}{9}, y'|_{x=1} = -1$

8. Giải phương trình vi phân

- a) $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ b) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \cdot \sqrt{x+1}$
 c) $y'' + y = \operatorname{tg} x$ d) $y'' + 5y' + 6y = -1$
 e) $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x} \frac{1 + e^{2x}}{\sqrt{\cos 2x}}$ f) $y'' + 2y' + 10y = 0$

$$g) y'' - y = x^2 - x + 1$$

$$9. \text{ Giải phương trình vi phân } y'' - \frac{x}{1-x^2} y' + \frac{4}{1-x^2} y = \frac{-4}{1-x^2},$$

biết rằng một nghiệm riêng $y_1 = \cos(\alpha \arccos x)$ của phương trình thuần nhất (PTTN), α cần xác định.

Hướng dẫn: tính các đạo hàm y_1 thế vào PTTN ta có $\alpha=2$ suy ra $y_1 = 2x^2 - 1$, ($\alpha=-2$ loại), sau đó tìm một nghiệm riêng ĐLTT với y_1 là $y_2 = u(x) \cdot y_1(x)$, tính các đạo hàm y_2 thế vào PTTN ta có

$$\frac{u''}{u'} = \frac{9x - 10x^3}{(x^2 - 1)(2x^2 - 1)} = \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{-8}{2x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{(2x^2 - 1)^2} \Rightarrow u = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1},$$

chọn $\Rightarrow y_2 = x\sqrt{x^2 - 1}$, tìm nghiệm tổng quát của đề bài thỏa:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{-4}{1-x^2} \end{cases}, \text{ và có } c_1 = -2x^2 + k_1,$$

$$c_2 = 4 \int \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = 4x\sqrt{x^2 - 1} + k_2, \text{ vậy nghiệm cuối cùng:}$$

$$y = (-2x^2 + k_1)(2x^2 - 1) + (4x\sqrt{x^2 - 1} + k_2)x\sqrt{x^2 - 1}.$$

10. Chứng minh: giả sử có $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ là 3 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình vi phân thuần nhất.

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0$$

thì nghiệm tổng quát của PTKTN

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x) \quad (1),$$

$$\text{có dạng: } y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \quad (2),$$

trong đó $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ là 3 hàm số và cùng thỏa hệ phương trình

$$\text{Wronsky sau: } \begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = f(x) \end{cases} \quad (3),$$

Hướng dẫn: đạo hàm (2) ta có:

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3' + c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3,$$

$$\text{chọn } c_i(x): c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0,$$

vậy đạo hàm tiếp:

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'' + c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3',$$

chọn $c_i(x)$: $c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0$,

vậy đạo hàm tiếp:

$$y''' = c_1 y_1''' + c_2 y_2''' + c_3 y_3''' + c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'',$$

vì thoả mãn (1) nên ta có kết quả. Từ bài tập này ta có thể suy ra cho ptvp bậc n cũng áp dụng được phương trình Wronsky bậc n.

CHƯƠNG 6

LÝ THUYẾT CHUỖI

BÀI 1: KHÁI NIỆM VỀ CHUỖI SỐ

1.1 Định nghĩa : Cho một dãy số vô hạn các số hạng

$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ Tổng vô hạn các số hạng $u_1, u_2 + \dots + u_n, \dots$

$$\text{Ký hiệu } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (I)$$

gọi là một chuỗi số.

Định nghĩa : Tổng riêng thứ n của chuỗi số là tổng của n số hạng đầu tiên của chuỗi số $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

• Nếu dãy tổng riêng S_n hội tụ tức có giới hạn S hữu hạn thì ta nói chuỗi số (I) hội tụ và có tổng là S . Ta viết : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$

• Nếu dãy tổng riêng S_n phân kỳ thì ta nói chuỗi số (I) phân kỳ.

Ví dụ tìm tổng riêng và tổng của chuỗi số.

Ví dụ 1 : Cho chuỗi số $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{Ta có : } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \dots$$

$$\text{Nhận xét : } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Ta có } S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{khi } n \rightarrow \infty$$

$$\text{Vậy chuỗi số (*) hội tụ và } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Ví dụ 2 : Cho $u_n = \frac{1}{2^n}$

Khi đó: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ. Lúc đó ta viết $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$

Ví dụ 3: Ta có thể đưa chuỗi kép: $I = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m x^{m+n-2}$ về dạng chuỗi đơn

qua đổi biến chỉ số như sau: đặt $m+n=p$ thì

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m x^{m+n-2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\left[\frac{p}{2} \right]} x^{p-2} = \sum_{p=2}^{\infty} \left[\frac{p}{2} \right] x^{p-2}, \text{ với } \left[\frac{p}{2} \right] \text{ là phần}$$

nguyên. $I = \sum_{p=2}^{\infty} \left[\frac{p}{2} \right] x^{p-2} = 1x^0 + 1x^1 + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \dots$

1.2 Điều kiện cần (ắt có) chuỗi hội tụ

Định lý. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $u_n \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow \infty$

Ví dụ 1: Chứng minh chuỗi số sau phân kỳ $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$

Ta có $u_n = \frac{2n-1}{2n} \rightarrow 1 \neq 0, \Rightarrow$ Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$ phân kỳ.

Ví dụ 2: Xét chuỗi hình học $1 + q + q^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$

Chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ hội tụ nếu $|q| < 1$ và $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$

Chuỗi này phân kỳ khi $|q| \geq 1$.

Ví dụ 3: Xét chuỗi: $f(\lambda, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} x^m$, giả sử $|\lambda x| < 1$

Chứng minh $f'_\lambda(\lambda, x) = f^2(\lambda, x)$

Thật vậy vì $|\lambda x| < 1$ nên $f(\lambda, x) = \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda x)^{m-1}$ hội tụ

$$\text{Vậy } f^2(\lambda, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} x^m \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} x^n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2} x^{m+n}$$

$$\text{Đặt } m+n=p \text{ thì } f^2(\lambda, x) = \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{p-1} \lambda^{p-2} x^p = \sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \lambda^{p-2} x^p =$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) \lambda^{m-2} x^m = f'_{\lambda}(\lambda, x) \text{ đpcm.}$$

1.3 Tính chất của chuỗi số :

Tính chất 1 : Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì :

$$\text{a/ } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ hội tụ và : } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

$$\text{b/ } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n \text{ hội tụ và : } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Tính chất 2 : Tính chất hội tụ hoặc phân kỳ của một chuỗi số là không đổi nếu ta thêm vào hoặc bớt đi một số hữu hạn các số hạng.

BÀI 2: CHUỖI SỐ DƯƠNG

Chuỗi số dương : Khi $u_n \geq 0 \forall n$.

2.1 Định lý so sánh 1 :

Cho 2 chuỗi số dương: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, u_n \leq v_n, \forall n \geq k_0$ cho trước.

a/ Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ .

b/ Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

Ví dụ Chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}$ hội tụ.

Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}$ (*)

Ta so sánh với chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (**)

Ta có $\frac{1}{2^n \cdot n} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n$. Mà (**) hội tụ nên (*) hội tụ.

2.2 Định lý so sánh 2 :

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$.

Khi ấy hai chuỗi số dương trên cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 1. Chứng minh chuỗi số sau hội tụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2+n+1)}{5^n \cdot n^2}$ (*)

So sánh với chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ (**)

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{n^2} = 1 \neq 0$

Mà (**) hội tụ \Rightarrow (*) hội tụ

Ví dụ 2: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(2q)^n}$, q tham số, HT khi nào ?

So sánh với chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2q)^n}$ HT $\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2q}\right| < 1 \Leftrightarrow |2q| > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q < \frac{-1}{2} \vee q > \frac{1}{2}$. Vì ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

2.3 Các tiêu chuẩn hội tụ :

a/ Tiêu chuẩn D'Alambert.

Cho chuỗi số dương: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$

Khi đó : Nếu $D < 1$ thì chuỗi hội tụ

Nếu $D > 1$ thì chuỗi phân kỳ

Ví dụ : Chứng minh chuỗi số sau hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (*)

Dùng tiêu chuẩn D'Alembert:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Vậy chuỗi (*) hội tụ.

b/ Tiêu chuẩn Cauchy :

Cho chuỗi số dương: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = D$

Khi đó Nếu $D < 1$ thì chuỗi hội tụ

Nếu $D > 1$ thì chuỗi phân kỳ

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số sau : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 2^n}$ (*)

Xét chuỗi số dương $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$,

Dùng tiêu chuẩn Cauchy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{e}{2} > 1$, Vậy (*) phân kỳ.

Ví dụ 2: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha 2^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, α tham số, PK khi nào ?

Dùng tiêu chuẩn Cauchy $\cdot 2|\alpha|^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 2, \alpha \neq 0$

c/ Tiêu chuẩn tích phân:

Nếu $f(x) \geq 0$ liên tục và giảm trên $[k, +\infty)$ $k \in \mathbb{N}$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ

khi và chỉ khi tích phân $\int_1^{\infty} f(x) dx$ hội tụ.

Từ định lý này ta có thể thấy ngay rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ hội tụ khi $\alpha > 1$

và phân kỳ khi $\alpha \leq 1$. Do sự tương đồng về tích phân suy rộng:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^{\infty} = \begin{cases} \alpha > 1, & HT \\ \alpha < 1, & PK \\ \alpha = 1, \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty & PK \end{cases}$$

Ví dụ : Thực ra ta có thể chứng minh: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ phân kỳ như sau:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{(2)} + \dots \\ &+ \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{(3)} + \underbrace{\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots}_{(4)} + \dots \end{aligned} \tag{a}$$

Ta xét chuỗi phụ:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{(2 \text{ so hang})} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{(4 \text{ so hang})} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{(8 \text{ so hang})} + \dots$$

(b)

Gọi $S_n^{(a)}$ tổng riêng của chuỗi (a), $S_n^{(b)}$ tổng riêng của chuỗi (b),

$$\begin{aligned} S_4^{(b)} &= S_{2^2}^{(b)} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{(2 \text{ so hang})} = 1 + 2 \times \frac{1}{2} \\ S_8^{(b)} &= S_{2^3}^{(b)} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{(2 \text{ so hang})} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{(4 \text{ so hang})} = 1 + 3 \times \frac{1}{2} \\ S_{16}^{(b)} &= S_{2^4}^{(b)} = \dots = 1 + 4 \times \frac{1}{2}, \dots, S_{2^k}^{(b)} = \dots = 1 + k \times \frac{1}{2} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k}^{(b)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + k \times \frac{1}{2}\right) = \infty, \implies \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) PK. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(2n+1)n^{\alpha+3}}$, α tham số, HT khi nào ?

So sánh với chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3}}$ HT $\Leftrightarrow \alpha+3 > 1 \Leftrightarrow \alpha > -2$

Vì ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n+1} = 2 \neq 0$

BÀI 3: CHUỖI CÓ DẤU TỰ Ý

3.1 Chuỗi đan dấu :

Chuỗi đan dấu là chuỗi có dạng :

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n, \quad u_n \geq 0 \quad (1)$$

Xét chuỗi $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0 \quad (2)$

Định lý Leibnitz :

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n, \forall n, u_n \geq 0$

Nếu dãy u_n giảm và $u_n \rightarrow 0$ thì chuỗi đan dấu hội tụ.

Ví dụ Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (*)$

Ta có . $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ giảm và $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Do đó chuỗi (*) hội tụ.

Định lý :

a/ Cho chuỗi (2) hội tụ thì chuỗi (1) cũng hội tụ.

b/ Cho chuỗi (2) phân kỳ theo kiểu $u_n \rightarrow 0$, D'Alambert, Cauchy thì (1) phân kỳ.

c/ Riêng kiểu tích phân thì chưa biết. Ví dụ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (*)$ hội tụ

theo Leibnitz, nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ lại phân kỳ, nghĩa là chuỗi (2) phân

kỳ theo kiểu tích phân thì chưa chắc chuỗi (1) phân kỳ.

3.2 Chuỗi có dấu bất kỳ :

Định lý : Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) có các số hạng u_n có dấu bất kỳ.

Khi đó, nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (2) hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

(Do định lý so sánh 1).

Định nghĩa :

- Ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

Ví dụ 1 : Chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối.

ta xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ (*). Ta có : $\frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall n$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ \Rightarrow (*) hội tụ. Vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 2: Chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ bán hội tụ.

Chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo định lý Leibnitz.

Nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ phân kỳ.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ bán hội tụ.

BÀI 4: CHUỖI HÀM

Miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1),

trong đó $u_n(x)$ là hàm của x . Tập D : là tập tất cả những điểm x mà chuỗi (1) hội tụ về hàm $u(x)$ [$u(x)$ là tổng của chuỗi (1)] gọi là miền hội tụ của chuỗi (1). Lúc đó ta viết: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x)$.

Để tìm miền hội tụ (1) ta sử dụng các tính chất sau:

1/ Xét Hàm trôi: Nếu $|u_n(x)| \leq c_n$, c_n là số dương,

nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ hội tụ thì (1) hội tụ với $\forall x: |u_n(x)| \leq c_n$.

2/ Xét tỉ số: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |D(x)|$, buộc $|D(x)| < 1$, (2), giải bất

phương trình (2) này ta được khoảng hội tụ, sau đó xét thêm tại các đầu mút của khoảng đó (được chuỗi số). Tại đầu mút ta chỉ sử dụng điều kiện ất có, hoặc các tiêu chuẩn so sánh.

3/ Xét căn số bậc n : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = |C(x)|$, buộc $|C(x)| < 1$, (3), giải

bất phương trình (3) này ta được khoảng hội tụ, sau đó xét thêm tại các mút của khoảng đó (được chuỗi số). Tại mút ta chỉ sử dụng điều kiện ất có, hoặc các tiêu chuẩn so sánh.

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1} \cdot (x-4)^n$

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = |x-4| \frac{1}{\left(n^{3/2}\right)^{\frac{1}{n}}} \rightarrow |x-4| \frac{1}{\left(n^{1/n}\right)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow |x-4| \frac{1}{1} = |x-4| = |C(x)|,$$

chú ý: $n^{1/n} = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, và $a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, $a \neq 0$

$|x-4| < 1 \Leftrightarrow 3 < x < 5$, bây giờ xét thêm tại 2 mút ta có:

Tại $x=5$: ta có $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1} \cdot (1)^n \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \Rightarrow$ hội tụ.

Tại $x=3$: ta có $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1} \cdot (-1)^n$, đây là chuỗi đan dấu, và có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1} = 0, \quad \frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)^2+1} < \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1} \quad \forall n$$

Vậy thoả điều kiện Leibnitz \Rightarrow hội tụ.

Kết luận miền hội tụ là $[-3,5]$ (kể cả 2 đầu mút).

BÀI 5: CHUỖI LŨY THỪA

5.1 Mở đầu:

Định nghĩa:

Cho chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

Ta nói chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ hội tụ tại $x = x_0$ nếu chuỗi số

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$ hội tụ. Ta nói x_0 là điểm hội tụ.

Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ luôn luôn hội tụ tại $x = 0$.

Định nghĩa: Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (*)

- Ta nói chuỗi (*) có bán kính hội tụ $r = 0$ nếu nó chỉ hội tụ tại $x = 0$, và $r = +\infty$ nếu nó hội tụ tại mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Chuỗi (*) có bán kính hội tụ là $r > 0$ nếu nó hội tụ tại $\forall x \in (-r, r)$ và phân kỳ tại $\forall x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$.
Còn trên biên $x = \pm r$ thì chưa biết cụ thể.

Định lý: Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{hay} \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\text{Khi đó bán kính hội tụ : } r = \begin{cases} 0 & \text{neu } \rho = \infty \\ \infty & \text{neu } \rho = 0 \\ 1/\rho & \text{neu } \rho > 0 \end{cases},$$

Do dùng tiêu chuẩn D'Alambert chẳng hạn ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = |D(x)| < 1$$

$$\Rightarrow |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\rho} = r. \text{ Tiêu chuẩn Cauchy cũng thế.}$$

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$

Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$ (*)

$$\text{Ta có: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}} = 1.$$

Do đó $r = 1 \Rightarrow$ Khoảng hội tụ là $(-1, 1)$

• Tại $x = -1$, chuỗi (*) có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{phân kỳ})$$

• Tại $x = 1$, chuỗi (*) có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}, \text{ Chuỗi đan dấu hội tụ theo Leibnitz.}$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi (*) là: $(-1, 1]$

5.2 Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa:

Nếu hàm $f(x)$ liên tục có đạo hàm vô hạn lần tại x_0 , và lân cận x_0 .

Thì chuỗi:

$$(1) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \text{ gọi là chuỗi Taylor, (gọi là khai triển thành}$$

chuỗi Taylor hàm $f(x)$), khi $x_0=0$ thì chuỗi trở thành Maclaurin:

$$(2) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \text{ đối với (1) nếu đặt } x-x_0=X, \text{ ta được dạng (2), nên}$$

chỉ cần xét dạng (2).

Chú ý:

Nếu hàm $f(x)$ liên tục có đạo hàm vô hạn lần tại x_0 , và lân cận x_0 . Thì có khai triển thành chuỗi Taylor. Nhưng chuỗi này có hội tụ không? nếu có thì về đâu, ở đâu? và một câu hỏi đặt ra là: giả sử khi nó đã hội tụ thì có hội tụ đúng về tổng ban đầu hàm $f(x)$ không?. Ở đây ta chỉ đề cập đến các hàm mà có khai triển Taylor hội tụ về đúng hàm đó trong miền hội tụ. Khai triển Taylor các hàm cơ bản đã được đề cập trong chương 2.

Ví dụ:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots, \text{ hội tụ } |x| < 1$$

Nếu $\alpha = -1$, ta có:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \text{ hội tụ } |x| < 1$$

Nếu thay x bởi $-x$, ta có:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \text{ hội tụ } |x| < 1$$

Khi cần khai triển theo $(x-x_0)$, ($x_0 \neq 0$), ta đặt $(x-x_0)=X$, khai triển theo X , sau đó trở lại với biến $(x-x_0)$.

Ví dụ 1:

Khai triển hàm $y=\ln(2x-1)$ theo chuỗi lũy thừa của $(x-1)$ từ đó suy ra $y^{(1999)}(1)$.

ta có: $\ln(2x-1) = \ln(2(x-1)+1) = \ln(1+2(x-1)) = \ln(1+X)$. và chương 2 có:

$$\ln(1+X) = \frac{X}{1} - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n}, \text{ vậy}$$

$$\ln(2x-1) = \frac{2(x-1)}{1} - \frac{2^2(x-1)^2}{2} + \frac{2^3(x-1)^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n(x-1)^n}{n}$$

lấy đạo hàm bậc cao để thấy rằng:

$$y^{(n)}(x=1) = (n-1)! 2^n (-1)^{n+1} \Rightarrow y^{(1999)}(x=1) = 1998! \times 2^{1999}$$

Ví dụ 2:

Tương tự ta khai triển hàm sau đây tại lân cận $x=\infty$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{3}{8} \frac{1}{x^2} - \frac{5}{16} \frac{1}{x^3} + \frac{35}{128} \frac{1}{x^4} \dots \text{(x ở dưới mẫu số)}$$

Nhưng nếu khai triển hàm này tại lân cận $x=0$, ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8} x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{16} x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{128} x^{\frac{9}{2}} \dots, \text{(x ở trên tử số)}$$

BÀI 6: CHUỖI FOURIER

6.1 Mở đầu :

Định nghĩa.

Giả sử $f(x)$ có thể khai triển được thành chuỗi lượng giác trên đoạn

$$[-\pi, \pi]. \text{ Khi đó ta có thể viết } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ví dụ . Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π ,

$$\text{xác định như sau } f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} x dx \right] = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi n} \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2}, & n \text{ lẻ} \\ 0, & n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = -\frac{x \cos nx}{\pi n} \Big|_0^{\pi} + 0 =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ lẻ} \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

6.2 Khai triển Fourier của hàm chẵn và hàm lẻ :

Cho $f(x)$ là hàm chẵn, ta có chuỗi Fourier của hàm $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$\text{với } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ví dụ 1 : Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , $f(x) = [x]$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Ta có :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = -\frac{2}{\pi n^2} (1 - \cos n\pi)$$

$$\text{Do đó : } a_1 = -\frac{4}{\pi}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{4}{3^2 \pi}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{4}{5^2 \pi}, \dots$$

$$\text{Vậy : } f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right)$$

Giả sử . $f(x)$ là hàm lẻ. Khi đó ta có khai triển Fourier .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ví dụ 2 . Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π ,

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

$$\text{Ta có : } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -2 \frac{\cos n\pi}{n}$$

Do đó : $b_1 = 2, b_2 = -\frac{2}{2}, b_3 = +\frac{2}{3}, \dots$

Vậy ta có $f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right)$

6.3 Khai triển hàm không bị chặn thành chuỗi Fourier:

Ví dụ 1: $f(x) = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$

$f(x) = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$, hàm chẵn và bằng vô cùng với $x = 2k\pi$

Ta sẽ chỉ ra hàm có chu kỳ 2π .

$$\left| 2 \sin \frac{x+2\pi}{2} \right| = \left| 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \pi \right) \right| = \left| 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right|$$

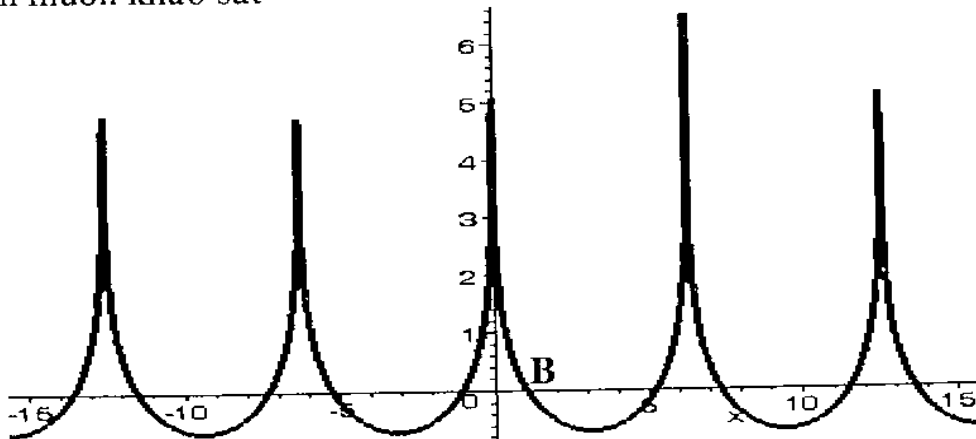
$$\Rightarrow \ln \left| 2 \sin \frac{x+2\pi}{2} \right| = \ln \left| 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right|.$$

Đồ thị của của hàm: xem hình dưới

Tọa độ giao điểm gần O

nhất là điểm B có hoành độ $\frac{\pi}{3}$, vì $\ln \left| 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right| = \ln |1| = 0$ do tính chu kỳ,

nên muốn khảo sát



tính khả tích của hàm trên toàn trục thực, ta chỉ cần khảo sát nó trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{3} \right]$ Ta chỉ cần khảo sát ở cận 0 của hàm mà thôi.

$$-\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx = -\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx = x \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \Big|_{x=\varepsilon}^{x=\frac{\pi}{3}} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\varepsilon 2 \sin \frac{x}{2}} dx$$

$$= \varepsilon \ln \left(2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right) + \int \frac{\frac{\pi}{3} x \cos \frac{x}{2}}{\varepsilon 2 \sin \frac{x}{2}} dx, \text{ ta dùng L'opital để chứng minh:}$$

$$x \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) = \frac{\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow 0, \text{ còn tích phân cuối sẽ tiến tới tích}$$

$$\text{phân: } \int \frac{\frac{\pi}{3} x \cos \frac{x}{2}}{\varepsilon 2 \sin \frac{x}{2}} dx \rightarrow \int \frac{\frac{\pi}{3} x \cos \frac{x}{2}}{0 2 \sin \frac{x}{2}} dx \text{ vì } \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}} \rightarrow 1$$

Tóm lại $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx$ tồn tại, nghĩa là $f(x)$ khả tích trên đoạn

$\left[0, \frac{\pi}{3} \right]$ Bây giờ ta khai triển thành chuỗi Fourier:

Do tính chẵn của hàm $f(x)$ nên:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{Trước hết ta tính } n=0: I = \int_0^{\pi} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx = \pi \ln 2 + \int_0^{\pi} \ln \left(\sin \frac{x}{2} \right) dx$$

Chú ý ta có thể cm tính HT của $Y = \int_0^{\pi} \ln \left(\sin \frac{x}{2} \right) dx$ như cách làm ở trên.

Bây giờ ta tính Y , đổi biến $x=2t$ cho ta:

$$Y = \int_0^{\pi} \ln \left(\sin \frac{x}{2} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (\sin t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt =$$

$$= \pi \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\sin \frac{t}{2} \right) dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\cos \frac{t}{2} \right) dt$$

$$\text{Phép thế } t = \pi - u \Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\cos \frac{t}{2} \right) dt = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \left(\sin \frac{u}{2} \right) du = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \left(\sin \frac{t}{2} \right) dt$$

$$\text{Do } \int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}, \text{ nên khi thế vào ta có: } Y = \pi \ln 2 + 2Y \Rightarrow Y = -\pi \ln 2$$

Từ đây ta suy ra $I = \pi \ln 2 - \pi \ln 2 = 0$ và như vậy $a_0 = 0$.

Bây giờ tiếp tục làm cho a_n

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \cos nx dx = \left\{ -\frac{2}{\pi} \frac{\sin nx \cdot \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)}{n} \right\} \Bigg|_{x=0}^{x=\pi} +$$

$$+ \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin nx \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx$$

bởi vì số hạng thứ nhất bằng 0, do tính giới hạn Lopital.

Ở tích phân cuối cùng ta sử dụng:

$$\sin nx \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right] \quad \text{Vậy}$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Do có kết quả: } \boxed{\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du} \quad \text{và} \quad \boxed{\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du}$$

Vậy với $x \neq 2k\pi$ ta có khai triển Fourier:

$$-\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots + \frac{\cos nx}{n} + \dots$$

Nhưng thật ra khi $x = 2k\pi$, thì cả 2 vế đều là vô cùng nên khai triển trên

$$\text{đúng với mọi } x. \text{ Khi } x = \pi \text{ ta sẽ được: } \boxed{\ln 2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots}$$

Ví dụ 2: $f(x) = \ln \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$

$f(x) = \ln \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$, hàm chẵn và bằng vô cùng với $x = (2k+1)\pi$

Nếu đặt $x = t - \pi$

$$\ln \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| = \ln \left| 2 \cos \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right| = \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| =$$

$$= -\cos t - \frac{\cos 2t}{2} - \frac{\cos 3t}{3} - \dots - \frac{\cos nt}{n} - \dots \text{ Nếu đặt lại } t = x + \pi$$

$$\ln \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| = \cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{5} + \dots$$

nhưng khi $x = (2k+1)\pi$ thì cả 2 vế đều âm vô cùng. Vậy đẳng thức trên là đúng với mọi x .

BÀI TẬP

1/ Tìm tổng của chuỗi số.

$$a/ 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots + \frac{2}{3^{n-1}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$$

$$b/ \frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \frac{9}{100^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{100^n}$$

$$c/ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$d/ \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$e/ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \quad f/ \sum_{n=1}^{\infty} (\arctg n - \arctg(n+1))$$

$$g/ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \right)$$

2/ Chứng minh chuỗi số sau phân kỳ :

$$a/ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{2n+1} \right) \quad b/ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n-1}{2n^2+5} \right)$$

3/ Chứng minh chuỗi số sau hội tụ . a/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ b/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

4/ Chứng minh chuỗi số sau phân kỳ :

$$a/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad b/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \quad c/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$$

Hướng dẫn : Dùng tiêu chuẩn Cauchy.

5/ Chứng minh chuỗi số sau phân kỳ : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Hướng dẫn : Dùng tiêu chuẩn tích phân, xét hàm số : $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

6/ Xét sự hội tụ của chuỗi : $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

Hướng dẫn : Dùng định lý Leibnitz.

7/ Chứng minh chuỗi : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2 \sin n}{n^2 + 1}$ hội tụ tuyệt đối

Hướng dẫn : $\frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2}$

8/ Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

9/ Tìm tổng của chuỗi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = f(x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

Hướng dẫn : $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots =$

$$= f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

10/ Tích phân chuỗi : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

11/ Xét sự hội tụ của chuỗi theo p:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots, p > 0$$

Hướng dẫn : Với $p > 1$: chuỗi hội tụ tuyệt đối.
 Với $0 < p \leq 1$: chuỗi bán hội tụ tuyệt đối.

11/ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi sau đây theo $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{2+n^p}{1+n^p}, \quad p \in \mathbb{N}$$

Hướng dẫn : Ta có : $\frac{2+n^p}{1+n^p} = 1+x$ với $x = \frac{1}{1+n^p}$

$$\text{Do đó : } \ln \left(\frac{2+n^p}{1+n^p} \right) = \ln(1+x) \approx x = \frac{1}{1+n^p} \approx \frac{1}{n^p}$$

12/ Xét sự hội tụ của chuỗi sau đây:

$$\text{a/ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)}{8^n n^2} \qquad \text{b/ } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1.4.7.....(3n-2)}{3.5.7.....(2n+1)}$$

$$\text{c/ } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5} \right)^n \qquad \text{d/ } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \cdot \ln n} \right)$$

13/ Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π , trên khoảng $]-\pi, \pi[$ có dạng . $f(x) = \frac{x}{2}$

Hướng dẫn : Ta có : $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} dx = 0, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \cos nx \cdot dx = 0,$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin nx \cdot dx = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

14/ Triển khai thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn, chu kỳ 2π :

$$f(x) = \pi - x, \text{ nếu } 0 < x < 2\pi$$

Hướng dẫn : Vẽ đồ thị hàm số $f(x)$

$\hat{f}(x)$ là hàm lẻ, do đó $f(x)$ có dạng : $f(x) = b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx + \dots$

$$\text{Ta có : } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin nxdx.$$

$$f(x) = 2(\sin x + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots) = \pi - x, \quad 0 < x < 2\pi$$

15/ Khai triển thành chuỗi Fourier hàm chẵn, chu kỳ 2π ,

$f(x) = \pi - x$ nếu $0 \leq x < \pi$. Ta vẽ đồ thị hàm số f .

Hàm $f(x)$ chẵn, do đó chuỗi Fourier của F có dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \dots + a_n \cos nx + \dots \text{ Ta có :}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx, \quad a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ chẵn} \\ \frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ lẻ} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \pi$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \dots \right] = \pi - x$$

16/ Triển khai thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn,

chu kỳ 2π , $f(x) = \cos px$ nếu $-\pi < x < \pi$ (p cho trước)

Hướng dẫn: $f(x)$ là hàm chẵn, do đó khai triển Fourier

của $f(x)$ có dạng. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \dots + a_n \cos nx + \dots$

$$\text{Ta có } \pi a_n = 2 \int_0^{\pi} \cos px \cdot \cos nx dx, \quad a_n = \frac{2p}{\pi} \sin(p\pi) \cdot \frac{(-1)^n}{p^2 - n^2}$$

$$f(x) = \frac{\sin p\pi}{\pi} \left[\frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2 - 1^2} \cos x + \dots + 2p \frac{(-1)^n}{p^2 - n^2} \cos nx + \dots \right]$$

$$f(x) = \cos px \quad \text{nếu } -\pi \leq x \leq \pi.$$

17/ Áp dụng khai triển Fourier của hàm $f(x)$ trong bài 16 để tìm khai triển thành phân số hữu tỉ của $\cotg p$.

18/ Chứng minh hệ thức. $\frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p} + \frac{2p}{1-p^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2p}{n^2-p^2} + \dots$

Hướng dẫn: Áp dụng khai triển trong bài 5 với $x = 0$.

CHƯƠNG 7

TÍCH PHÂN BỘI 2 (KÉP)

BÀI 1: BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

1.1 Bài toán mở đầu :

Ta nhớ lại rằng, tích phân xác định hay tích phân đơn phát xuất từ bài toán tính diện tích và tích phân kép lại xuất phát từ bài toán tính thể tích như sau :

Cần tính thể tích của hình có đáy phẳng là miền $D \subset Oxy$, đường sinh song song với trục oz, mặt trên là mặt cong xác định bởi hàm $z = z(x,y)$, với $M(x,y) \in D$. Ta chia miền D thành n phần, diện tích mỗi phần là $\Delta(S_i)$, cột thể tích có diện tích đáy $\Delta(S_i) \ni M_i(x_i, y_i)$, vậy cả thể tích là :

$$V_n = \sum_{i=1}^n (\Delta S_i) f(M_i) = \sum_{i=1}^n (\Delta S_i) f(x_i, y_i)$$

$$V = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} V_n, \text{ với } d_i = \text{dia}(\Delta S_i) = \text{bán kính của } \Delta S_i$$

chú ý : $\max d_i \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$

1.2 Định nghĩa :

Giới hạn trên nếu tồn tại hữu hạn (không phụ thuộc vào cách chia miền D) được gọi là tích phân kép của hàm $z = f(x,y)$ trên miền D , khi đó ta nói f khả tích trên miền D và ký hiệu nó là

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Nhận xét :

1) Theo định nghĩa nếu $f(x,y) = 1 \forall (x,y) \in D$ thì

$$\iint_D 1 dx dy = S(D) \text{ (diện tích miền } D).$$

2) $f(x,y) > 0$, liên tục $\forall (x,y) \in D$ thì $\iint_D f(x,y) dx dy = V(D)$ là thể

tích hình trụ có các đường sinh song song với Oz, hai đáy giới hạn bởi $z=0, z=f(x,y)$.

1.3 Tính chất của tích phân kép :

Các tính chất của tích phân kép cũng giống như tính chất của tích phân xác định.

Tính chất 1 : f liên tục trong D thì f khả tích trên D

Tính chất 2 : có tính tuyến tính

$$\iint_D (f + g) dx dy = \iint_D f dx dy + \iint_D g dx dy$$

$$\iint_D K f dx dy = K \iint_D f dx dy \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Tính chất 3 : nếu $D = D_1 \cup D_2$ và $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ thì

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

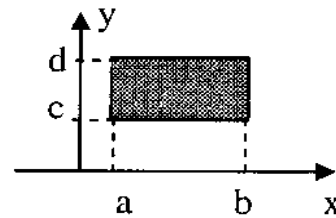
BÀI 2: PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN KÉP

2.1 Trong hệ trục Descartes.

□ Miền D là hình chữ nhật :

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a,b] \times [c,d]$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx \end{aligned}$$



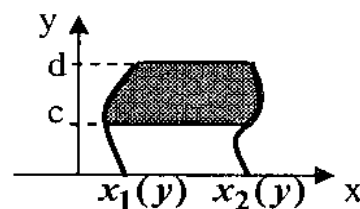
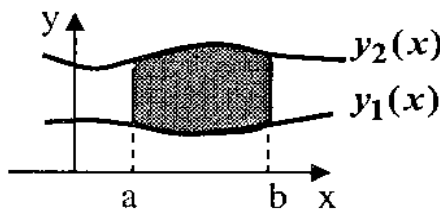
Vậy với miền là hình chữ nhật ta có thể hoán vị cận

Ví dụ : $D = [0,1] \times [1,2]$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2 + y^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{7}{3} \right) dx = \frac{8}{3}, \quad \text{hoặc} \end{aligned}$$

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_0^1 dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy = \frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3}$$

□ Miền D là miền bất kỳ :



• $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} = [a,b] \times [y_1(x), y_2(x)]$

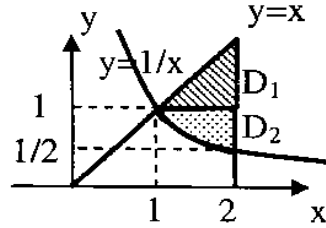
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y) dy$$

• $D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\} = [x_1(y), x_2(y)] \times [c,d]$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y=c}^{y=d} dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x, y) dx$$

- Nếu D là miền phức tạp thì phải phân D ra thành những miền đơn giản như trên

Ví dụ 1 : tính $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$



$D = D_1 \cup D_2$

Với D giới hạn bởi 3 đường sau : $x = 2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x$

cách 1 : $I = \int_1^2 dx \int_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \frac{x^2}{y^2} dy = \frac{9}{4}$

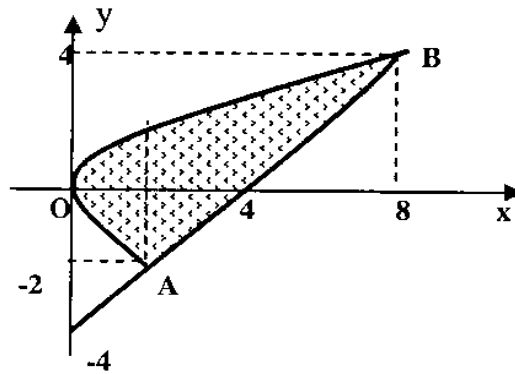
cách 2 : $I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$ vì $D = D_1 \cup D_2$ và $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

$$\iint_{D_1} = \int_{y=1}^{y=2} dy \int_{x=y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \left. \frac{-8}{3y} - \frac{y^2}{6} \right|_1^2 = \frac{5}{6}$$

$$\iint_{D_2} = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{x=\frac{1}{y}}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \left. \frac{-8}{3y} + \frac{1}{12} y^{-4} \right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{8}{3} - \frac{15}{12}$$

$\Rightarrow D = \frac{5}{6} + \frac{8}{3} - \frac{15}{12} = \frac{9}{4}$

Ví dụ 2 : Tính $I = \iint_D xy dx dy$,



D giới hạn bởi

2 đường $y = x - 4$ và $y^2 = 2x$,

Tính giao điểm ta có :

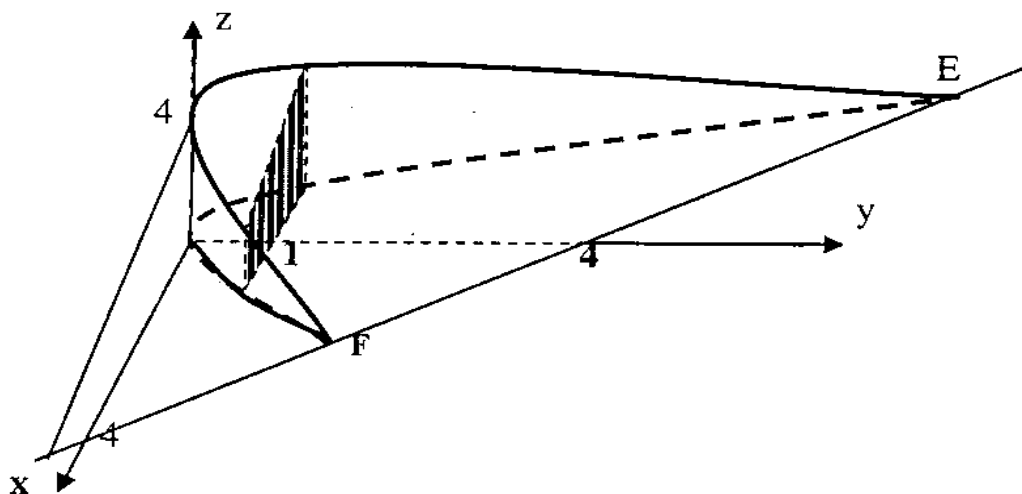
giao điểm : A(2,-2), B(8,4)

$$I = \int_{-2}^4 dy \int_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=y+4} xy dx = \int_{-2}^4 \left(y \frac{x^2}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^4}{4} + \frac{8}{3} y^3 + 8y^2 - \frac{y^6}{24} \right) \Big|_{-2}^4 = 90$$

Cách 2 : đổi cận dành cho bạn đọc coi như bài tập.

Ví dụ 3 : Tính thể tích khối, được giới hạn bởi các mặt $z = 4 - x - y$ và

$$z \geq 0, y = x^2, y \leq 1.$$



$$V_2 =$$

$$\iint_D (4 - x - y) dx dy = \int_{y=0}^{y=1} dy \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}} (4 - x - y) dx = \int_{y=0}^{y=1} (8\sqrt{y} - 2y^{\frac{3}{2}}) dy = \frac{68}{15}$$

$$\text{Cách 2: Đổi cận khác: } V_2 = \int_{x=-1}^{x=1} dy \int_{y=x^2}^{y=2} (4 - x - y) dx = \frac{68}{15}$$

Ví dụ 4: Tính thể tích miền, được giới hạn bởi các đường $z = 4 - x - y$ và $z \geq 0, y = x^2, y \geq 1$.

Dành cho Học Sinh kiểm tra chi tiết. Tính giao điểm ta có hai giao điểm.

$$x_F = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, x_E = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2},$$

$V = V_1 - V_2$, (V_2 là kết quả trên), ta cần tính V_1 là thể tích có đáy là parabol $y = x^2$

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_{V_1} (4 - x - y) dx dy = \int_{x=x_E}^{x=x_F} dx \int_{y=x^2}^{y=-x+4} (4 - x - y) dy = \\ &= \int_{x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}}^{x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} (-4x + 8 - \frac{7}{2}x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2}) dx = \frac{289}{60} \sqrt{17} \end{aligned}$$

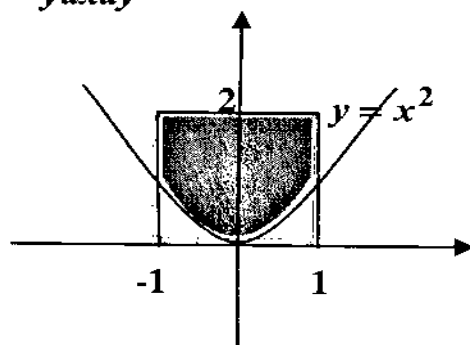
Ví dụ 4: Miền $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$, tính $\iint_Q \sqrt{|y - x^2|} dx dy$

Giải:

$$\iint_Q \sqrt{|y-x^2|} dx dy = \iint_{Q_1} \sqrt{y-x^2} dx dy + \iint_{Q_2} \sqrt{x^2-y} dx dy$$

$$\iint_{Q_1} \sqrt{y-x^2} dx dy = \int_{x=-1}^{x=1} dx \underbrace{\int_{y=x^2}^{y=2} \sqrt{y-x^2} dy}_{I_1}$$

$$\iint_{Q_2} \sqrt{x^2-y} dx dy = \int_{x=-1}^{x=1} dx \underbrace{\int_{y=0}^{y=x^2} \sqrt{x^2-y} dy}_{I_2}$$



Ở $\underbrace{\int_{y=x^2}^{y=2} \sqrt{y-x^2} dy}_{I_1}$ và $\underbrace{\int_{y=0}^{y=x^2} \sqrt{x^2-y} dy}_{I_2}$, ta đặt $t = y - x^2$, $t = -y + x^2$

$$\underbrace{\int_{y=x^2}^{y=2} \sqrt{y-x^2} dy}_{I_1} = \int_{t=0}^{t=2-x^2} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} (2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\underbrace{\int_{y=0}^{y=x^2} \sqrt{x^2-y} dy}_{I_2} = \int_{t=x^2}^{t=0} \sqrt{t} (-dt) = \frac{2}{3} (x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (x^3)$$

$$\iint_{Q_1} \sqrt{y-x^2} dx dy = \int_{x=-1}^{x=1} \frac{2}{3} (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$$

$$\iint_{Q_2} \sqrt{x^2-y} dx dy = \int_{x=-1}^{x=1} \frac{2}{3} (x^3) dx = 0$$

$$\iint_Q \sqrt{|y-x^2|} dx dy = \iint_{Q_1} \sqrt{y-x^2} dx dy + \iint_{Q_2} \sqrt{x^2-y} dx dy = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$$

Ví dụ 5: Cho hàm $f(y)$ liên tục trên $[0,1]$, đặt

$$F = \int_0^1 \left[\int_0^x (x-y) f(y) dy \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y) f(y) dy$$

Chứng tỏ hiện hữu số $\alpha \in]0,1[$ sao cho $F = -\frac{1}{12} f(\alpha)$

Giải:

Ta có:
$$\int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=x} (x-y) f(y) dy \right] dx = \int_{y=0}^{y=1} \left[\int_{x=y}^{x=1} (x-y) f(y) dx \right] dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} f(y) \left[\int_{x=y}^{x=1} (x-y) dx \right] dy = \int_{y=0}^{y=1} f(y) \left[\frac{1}{2}(1-y)^2 \right] dy$$

thế vào F ta thu được:

$$F = \int_{y=0}^{y=1} f(y) \left[\frac{1}{2}(1-y)^2 \right] dy - \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y) f(y) dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=1} f(y) [y(1-y)] dy, \text{ chú ý: } [y(1-y)] \text{ dương trên } [0,1]$$

dùng định lý trung bình ta có $\exists \alpha \in]0,1[$ sao cho:

$$\int_{y=0}^{y=1} f(y) [y(1-y)] dy = f(\alpha) \int_{y=0}^{y=1} [y(1-y)] dy = f(\alpha) \times \frac{1}{6}$$

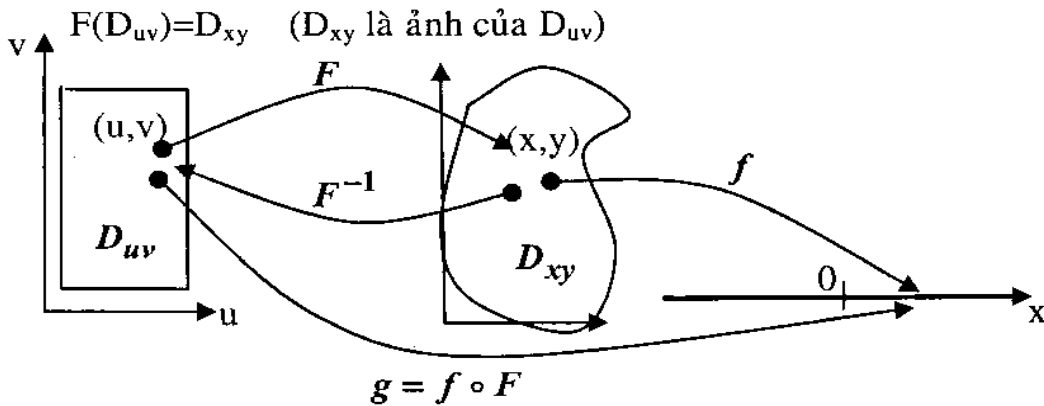
suy ra $F = -\frac{1}{12} f(\alpha)$

2.2 Phương pháp đổi biến :

Xét $I = \iint_D f(x,y) dx dy$, bây giờ đặt vấn đề đổi biến trong tích phân kép

có gì mới so với tích phân đơn đã học, mục đích là vì lấy tích phân trên miền D_{xy} quá phức tạp nên ta biến về miền D_{uv} đơn giản như các hình chữ nhật chẳng hạn, lúc đó lấy tích phân rất đơn giản.

$D_{xy} \ni (x,y) \leftrightarrow (u,v) \in D_{uv}$ phép biến đổi này 1-1 nên nó có phép biến đổi ngược. $F(u,v)=(x,y)$ và $F^{-1}(x,y)=(u,v)$, và có .



lúc đó hàm số $f: D_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$, tích phân của hàm số $f(x,y)$ trên D_{xy} , được đổi biến như sau:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}=F(D_{uv})} f(x, y) dx dy &= \iint_{D_{uv}} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv = \\ &= \iint_{D_{uv}} f_0 F(u, v) \cdot |\det(J_F(u, v))| du dv = \iint_{D_{uv}} g(u, v) \cdot |\det(J_F(u, v))| du dv \end{aligned}$$

trong đó J_F là Jacobi của phép biến đổi.

$$\det(J_F(u, v)) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}}$$

Ví dụ 1: Hình chữ nhật A(1,2), B(1,5), C(3,5), D(3,2), được biến hình qua phép biến đổi tuyến tính có ma trận tương ứng là :

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ tìm diện tích } A_1 B_1 C_1 D_1 \text{ biến hình qua PBDTTT. } G \text{ trên.}$$

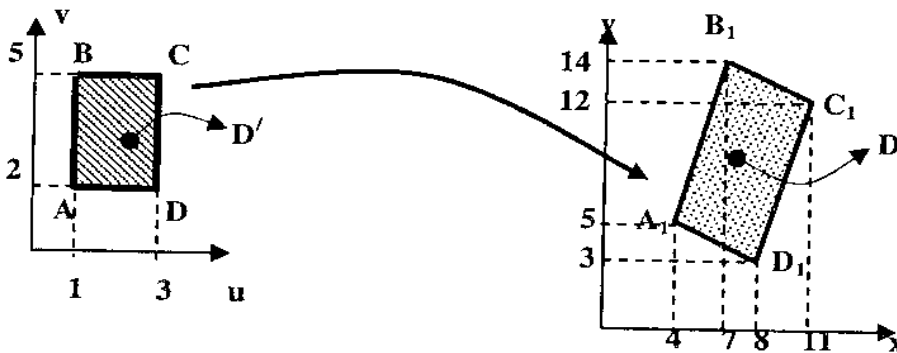
Xem hình dưới.

Dễ dàng kiểm chứng qua PBDTT. G ta có $A_1(4,5)$, $B_1(7,14)$, $C_1(11,12)$, $D_1(8,3)$, diện tích $ABCD=2.3=6$. qua liên hệ tọa độ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = J = \det(G) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7;$$

Vậy diện tích mới là :

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_D 1. dx dy = \int_{D'} |J|. du dv = 7 \int_{D'} du dv = 7 \times 6 = 42$$



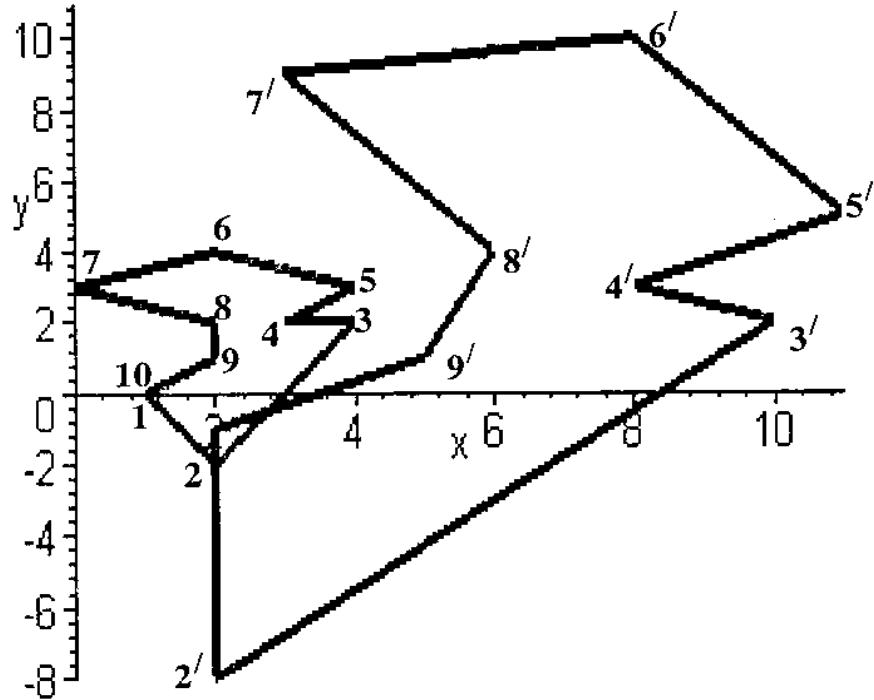
Ta có thể kiểm chứng kết quả qua công thức ở hình giải tích như sau:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 11 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 12 & 14 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} [(4.3-5.8)+(8.12-3.11)+(11.14-12.7)+(7.5-14.4)] = \frac{84}{2} = 42. \end{aligned}$$

Ta có thể giải bằng công thức bằng excel, hay Vn-570MS

4	8	11	7	4	
5	3	12	14	5	
	-28	63	70	-21	84

Ví dụ 2: Hình chữ s nhỏ có 10 tọa độ: điểm 10 trùng điểm 1 như sau:



TT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	4	3	4	2	0	2	2	1
y	0	-2	2	2	3	4	3	2	1	0

được biến hình qua phép biến đổi tuyến tính có ma trận tương ứng là :

$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, tìm diện tích S lớn qua biến hình PBDTTT G trên. Xem

hình.

Giải:

TT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
x	1	2	4	3	4	2	0	2	2	1	
y	0	-2	2	2	3	4	3	2	1	0	
$x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}$	-2	12	2	1	10	6	-6	-2	-1	20	

Diện tích: $s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) = \frac{1}{2} \times 20 = 10$ (gài excel, hàng 3)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = J = \det(G) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

Vậy diện tích mới là :

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_D 1 dx dy = \int_{D'} |J| du dv = 7 \int_{D'} du dv = 7 \times 10 = 70.$$

Cách khác: Qua phép biến hình ta tìm các tọa độ của hình S lớn như sau (như hình vẽ ở trên). Do nhân hai ma trận sau ta có đỉnh của hình S là:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 & 8 & 11 & 8 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ -1 & -8 & 2 & 3 & 5 & 10 & 9 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

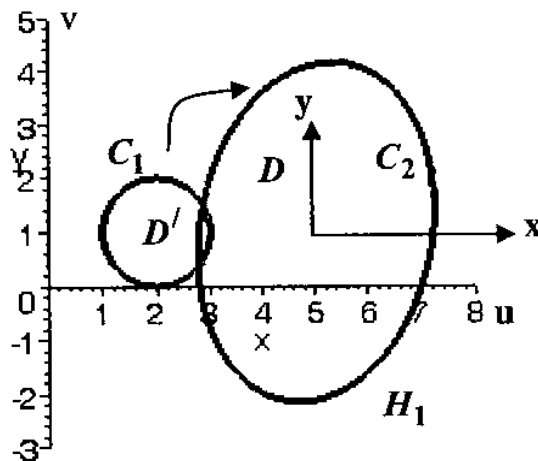
TT	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	10'	Σ
x	2	2	10	8	11	8	3	6	5	2	
y	-1	-8	2	3	5	10	9	4	1	-1	
$x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}$		-14	84	14	7	70	42	-42	-14	-7	140

Diện tích: $S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) = \frac{1}{2} \times 140 = 70$ (gài excel, hàng 3)



Ví dụ 3: Hình tròn $C_1 : (u-2)^2 + (v-1)^2 = 1$, được biến hình qua phép biến đổi tuyến tính có ma trận tương ứng là $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, tìm diện tích

hình ellip là biến hình qua PBDTTT. G trên.



Vậy diện tích mới là :

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_D 1 dx dy = \int_{D'} |J| du dv = 7 \int_{D'} du dv = 7 \times (1^1 \cdot \pi) = 7\pi$$

Cách 2: Vòng tròn C_1 biến thành ellip C_2 qua PBDTTT: Xem hình trên.

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = -u + 3v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{7}(3x - y) \\ v = \frac{1}{7}(x + 2y) \end{cases}$$

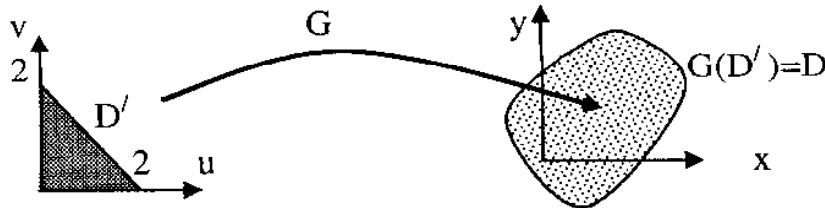
$$C_2: \frac{10}{49}x^2 - \frac{2}{49}xy - 2x + \frac{5}{49}y^2 + 4 = 0$$

Sau PBD trực giao ta đưa về dạng ellip: $5Y^2 + \frac{49}{5}X^2 = 49$ hay

$$\frac{X^2}{\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1, \text{ thì diện tích là: } S = \pi ab = \pi \frac{7}{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 7\pi.$$

Ví dụ 4: Miền D' là hình tam giác $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,2)$, được biến hình qua phép biến đổi phi tuyến $G: (x,y)=G(u,v)=(u+v, u^2-v)$. Tính tích phân

của hàm: $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}}$, trên miền biến hình $G(D')$.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u+v \\ u^2-v \end{bmatrix} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} =$$

$$= J = \det(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -1 \end{vmatrix} = -(1+2u);$$

Vậy

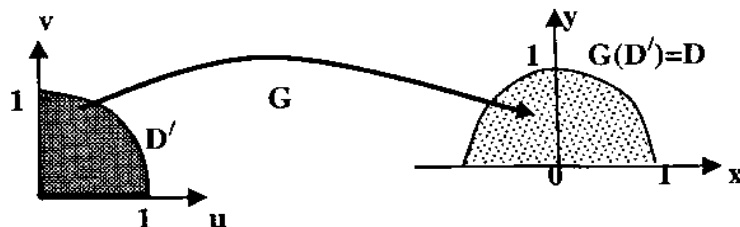
$$\int_{D=G(D')} f(x,y) dx dy = \int_D \frac{1}{\sqrt{1+4(u+v)+4(u^2-v)}} dx dy = \int_{D'} \frac{1}{2u+1} |J| du dv =$$

$$= \int_{D'} \frac{1+2u}{1+2u} du dv = \int_{D'} 1 du dv = \frac{1}{2} 2 \times 2 = 2 \quad \blacksquare$$

Ví dụ 5: Miền D' là phần tư hình tròn đơn vị trong mp Ouv , được biến hình qua phép biến đổi phi tuyến $G: (x,y)=G(u,v)=(u^2-v^2, 2uv)$. Tính tích

phân của hàm: $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, trên miền biến hình $G(D')$.

Một phần tư vòng tròn qua phép biến đổi G trở thành một nửa vòng tròn như hình vẽ



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \end{bmatrix} \Rightarrow J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} =$$

$$J = \det(G) = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2); \text{ Vậy .}$$

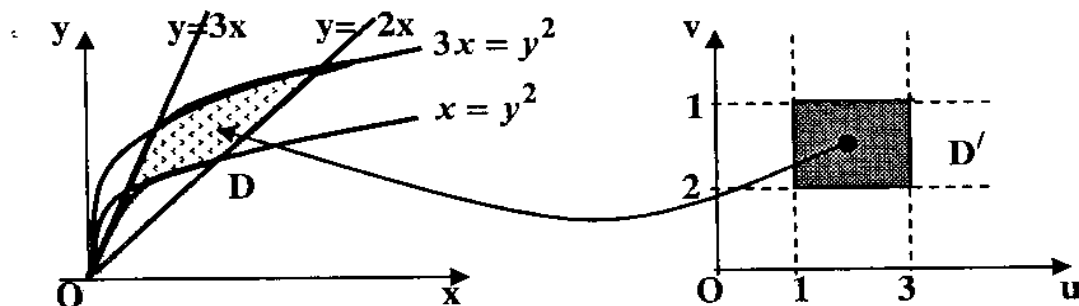
$$\int_{D=G(D')} f(x, y) dx dy = \int_D \frac{1}{\sqrt{(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2}} dx dy = \int_{D'} \frac{1}{u^2 + v^2} |J| du dv =$$

$$= 4 \int_{D'} \frac{u^2 + v^2}{u^2 + v^2} du dv = 4 \int_{D'} 1 du dv = 4 \times \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \pi$$

Cách khác: $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{r=0}^r=1} \frac{1}{r} r dr d\varphi = \pi$ ■

Ví dụ 6: $I = \iint_D xy dx dy$ D là miền cong giới hạn bởi bốn đường

$$y^2 = x, \quad y = x, \quad y^2 = 3x, \quad y = 2x$$



đổi biến đặt $u = \frac{y^2}{x}$, $v = \frac{y}{x}$, rõ ràng ta có ngay từ giới hạn miền D là

$1 \leq u \leq 3$ và $1 \leq v \leq 2$ và Jacobi có phép biến đổi này là

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -y^2 & 2y \\ x^2 & x \\ -y & 1 \\ x^2 & x \end{vmatrix}} = \frac{x^3}{y^2} = \frac{u}{v^4}$$

nếu làm phức tạp hơn ta có thể tính:

$$y = \frac{u}{v}, \quad x = \frac{u}{v^2} \Rightarrow \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v^2} & -\frac{2u}{v^3} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{v^4}$$

$$\text{Vậy } I = \iint_D xy dx dy = \iint_D \frac{u}{v^2} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{u}{v^4} du dv = \int_1^3 u^3 du \cdot \int_1^2 \frac{dv}{v^7} = \frac{105}{32} \quad \blacksquare$$

Ví dụ 7:

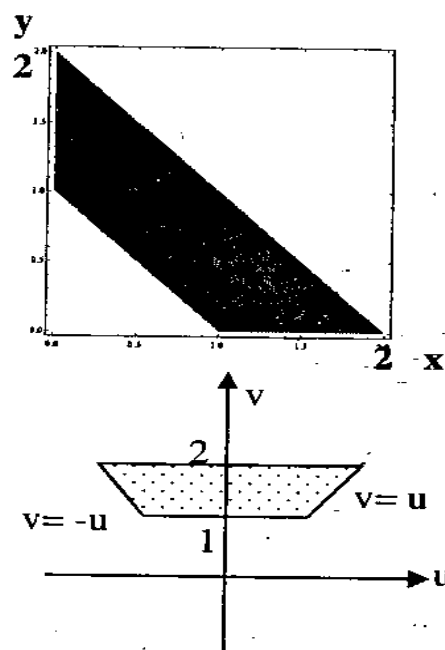
Miền Q giới hạn bởi 4 điểm (0,1), (0,2), (2,0) và (1,0),

$$\text{hãy tính } I = \iint_Q e^{\frac{(y-x)}{(y+x)}} dx dy$$

Giải:

$$\text{Đặt } u = (y-x), \quad v = (y+x)$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}$$

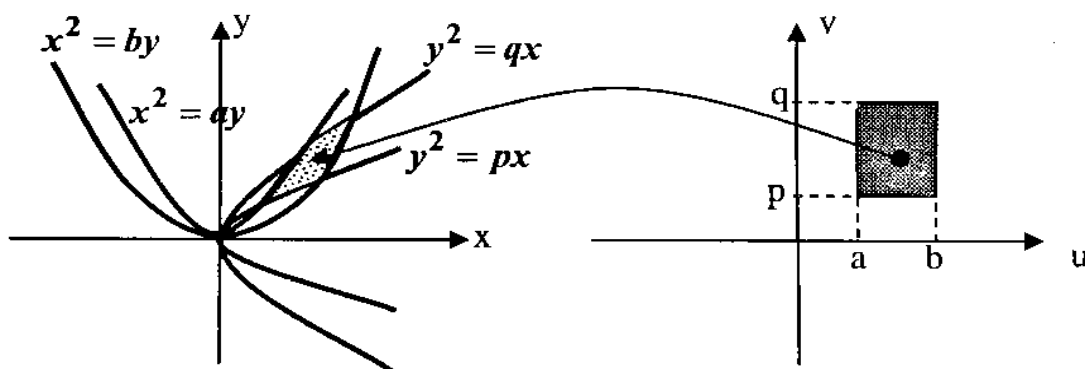


Miền lấy tích phân oxy, được biến thành miền $ou v$ như hình vẽ. Nên

$$\begin{aligned} I &= \iint_{Q_{xy}} e^{\frac{(y-x)}{(y+x)}} dx dy = \iint_{Q_{uv}} e^{u/v} du dv = \\ &= \int_{v=1}^{v=2} dv \int_{u=-v}^{u=v} e^{u/v} du = \frac{3}{4} (e - e^{-1}) \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Tính diện tích miền D giới hạn bởi

$$y^2 = px, \quad y^2 = qx, \quad x^2 = ay, \quad x^2 = by \quad \text{với } 0 < p < q, \quad 0 < a < b$$

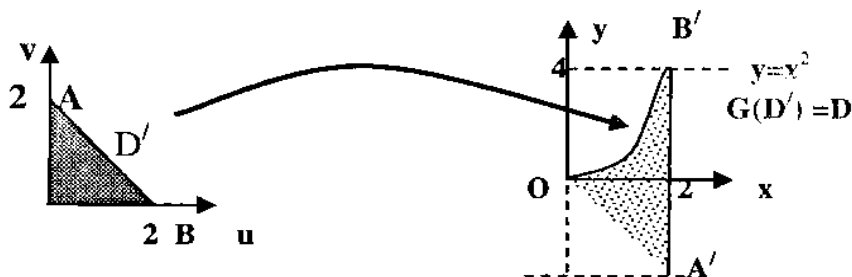


đặt $y^2 = vx, x^2 = uy$; $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -2x & -x^2 \\ y & y^2 \\ -y^2 & 2y \\ x^2 & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{|4-1|} = \frac{1}{3}$

vậy $S = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_a^b du \cdot \int_p^q dv = \frac{1}{3} (b-a)(q-p)$. ■

Ví dụ 9: Miền D' là hình tam giác $O(0,0), A(2,0), B(0,2)$, được biến hình qua phép biến đổi phi tuyến $G: (x,y)=G(u,v)=(u+v, u^2-v)$. Tính diện tích miền biến hình $G(D')$.

Giải:



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u+v \\ u^2-v \end{bmatrix} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} =$$

$$J = \det(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -1 \end{vmatrix} = -(1+2u);$$

Vậy $S = \int_{D=G(D')} 1 dx dy = \int_D |J| dx dy = \int_{D'} (1+2u) du dv =$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) + 2 \left(\int_{u=0}^{u=2} u du \int_{v=0}^{v=2-u} dv \right) = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

Cách 2: tam giác vuông cân OAB bên trục Ouv được biến thành miền kín bên trục Oxy. điểm A(u=0, v=2) biến thành A' (x=2, y=-2), điểm

B(u=2, v=0) biến thành B' (x=2, y=4), đoạn thẳng AB biến thành đường thẳng x=2, đoạn OB (v=0) biến thành cung OB' parabol y=x², đoạn OA

(u=0) biến thành đường OA' y=-x. Vậy S = $\left(\int_{x=0}^{x=2} dx \int_{y=-x}^{y=x^2} dy \right) = \frac{14}{3}$

Từ ví dụ này, ta có thể tính lại ví dụ 2 ở trước:

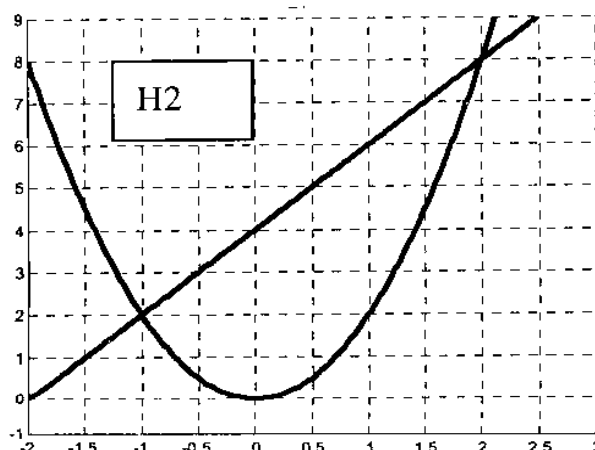
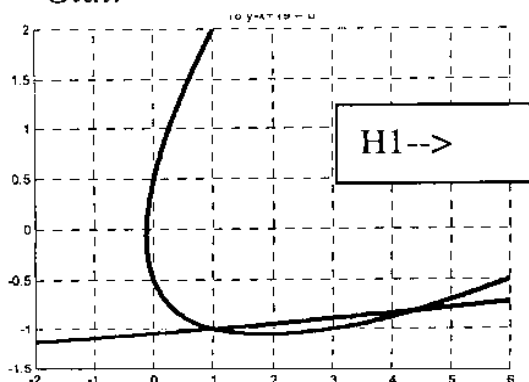
$$\int_{D=G(D')} f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=-x}^{y=x^2} \frac{dx dy}{\sqrt{1+4x+4y}} = \int_{x=0}^{x=2} \left[\frac{1}{2} (2x+1) - \frac{1}{2} \right] dx = 2$$

■

Ví dụ 10: Tính diện tích giới hạn bởi 2 đường sau:

$$\begin{cases} (1): 2x^2 + 8y^2 - 8xy - 16x - 2 = 0 \\ (2): 18y - x + 19 = 0 \end{cases}$$

Giải:



Từ (1) ta có thể viết lại: $2(x - 2y - 4)^2 = 32y + 34 \Leftrightarrow v = 2u^2$, vì

đặt $u = x - 2y - 4$, $v = 32y + 34$, thế vào (2) ta có: $v = 2u + 4$, Tính $J = \frac{1}{32}$

$$\text{vậy } S = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{32} du dv = \frac{1}{32} \int_{v=2u^2}^{v=2u+4} dv \int_{u=-1}^{u=2} du = \frac{9}{32}$$

■

Ví dụ 11: Tính diện tích giới hạn bởi 2 đường sau:

$$\begin{cases} (1): 3x^2 + 12y^2 - 12xy - 12x + 8y + 1 = 0 \\ (2): y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải:

Dùng phương pháp Lagrange ta đưa (1) về $3(x - 2y - 2)^2 = 16y + 11$

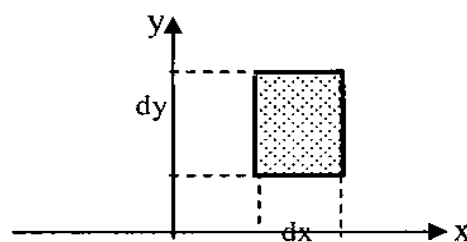
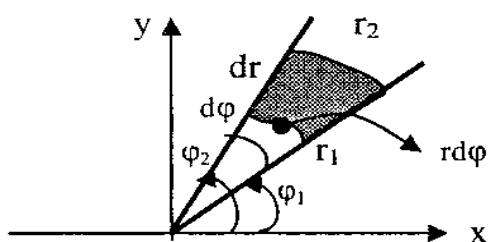
Đặt $\begin{cases} u = x - 2y - 2 \\ v = 16y + 11 \end{cases} \implies 3u^2 = v$, đưa (2) về $v = 3$,

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{1}{16},$$

vậy $S = J \int_{u=-1}^{u=1} (3 - 3u^2) du = \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$ ■

2.3 Tích phân trong hệ tọa độ cực :

phép biến đổi :



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \text{artg} \frac{y}{x} \end{cases}, J = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

Vậy thành phần r xuất hiện trong diện tích vi phân là $r d\varphi dr$ và :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \cdot dr d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \cdot \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \end{aligned}$$

Câu hỏi đặt ra là khi nào dùng tọa độ cực, câu trả lời có tính gợi ý tổng quát : “ khi nào miền D cần tính tích phân có hình dáng một phần hay cả đường tròn “ .

Ví dụ 1 : dùng tọa độ cực tính diện tích vòng tròn, bán kính R

$$S = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_{r=0}^{r=R} r dr = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2$$

Ví dụ 2: tính diện tích ellip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (C)

$$\text{đặt } \begin{cases} x = r a \cos \varphi \\ y = r b \sin \varphi \end{cases} \rightarrow J = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = abr$$

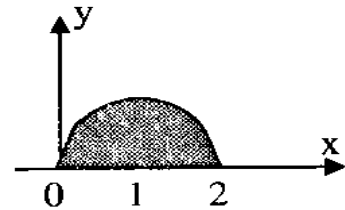
(C) biến thành vòng tròn có bán kính $r = 1$, vậy

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r=0}^{r=1} abr dr = 2\pi ab \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 = \pi ab$$

Ví dụ 3: Tính $I = \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$

với D là nửa trên đường tròn có phương trình:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$



ta có $x^2 + y^2 - 2x = 0$, thế tọa độ cực vào ta có

$$r^2 - 2r \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow r = 2 \cos \varphi$$

vậy

$$I = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} d\varphi \cdot \int_{r=0}^{r=2 \cos \varphi} r \sqrt{4-r^2} dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} -\frac{1}{2} (4-r^2)^{1/2} d(4-r^2) =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

Nhớ lại rằng công thức Walliss: $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} 1 & n \text{ lẻ} \\ \frac{\pi}{2} & n \text{ chẵn} \end{cases}$

Ví dụ 4: Tính thể tích giới hạn bởi

$$\text{hai mặt có phương trình sau: } \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2y + 3 \end{cases}$$

Ta có mặt chiếu: $x^2 + (y-1)^2 = 4$, vậy thể tích

$$V = \iint_D z(x, y) dx dy = \iint_D \left[(2y+3) - (x^2 + y^2) \right] dx dy$$

Đặt $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$, Mặt chiếu: $X^2 + (Y)^2 = 4$,

ta có $\frac{D(x, y)}{D(X, Y)} = 1$,

$$V = \iint_D \left[(2Y + 5) - (X^2 + Y^2 + 2Y + 1) \right] dXdY =$$

$$= \iint_D \left[4 - (X^2 + Y^2) \right] dXdY =$$

$$= 4 \iint_D dXdY - \iint_D (X^2 + Y^2) dXdY = 4 \pi 2^2 - \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=2} r^2 r dr =$$

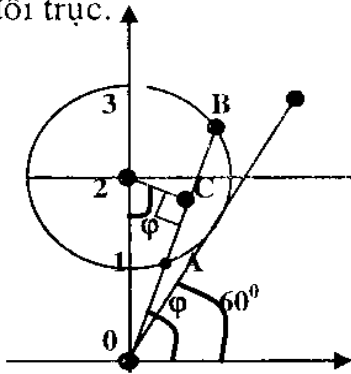
$$= 16\pi - 8\pi = 8\pi$$

Cách 2: $y = r \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = 2y + 3$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2r \sin \varphi + 3 \Leftrightarrow r^2 - 2 \sin \varphi r - 3 = 0 \Rightarrow r = \sin \varphi + \sqrt{\sin^2 \varphi + 3}$$

$$V = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=\sin \varphi + \sqrt{\sin^2 \varphi + 3}} \left[(2y + 3) - r^2 \right] r dr = 8\pi$$

Ví dụ 5: Tính diện tích hình tròn $(x)^2 + (y-2)^2 = 1$ bằng tọa độ cực, không đổi trục.



Để dàng tính được bán kính cực OA, OB:

$$r_{1,2} = 2 \sin \varphi \pm \sqrt{4 \sin^2 \varphi - 3}$$

$$S = \iint_D dx dy = 2 \int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r=r_1}^{r=r_2} r dr =$$

$$= 2 \int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r=r_1}^{r=r_2} r dr = 2 \int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=2 \sin \varphi - \sqrt{4 \sin^2 \varphi - 3}}^{r=2 \sin \varphi + \sqrt{4 \sin^2 \varphi - 3}}$$

$$= 2 \int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \left(4 \sin \varphi \sqrt{4 \sin^2 \varphi - 3} \right) d\varphi = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ví dụ 6: Tính tích phân suy rộng: $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, ta có thể xem

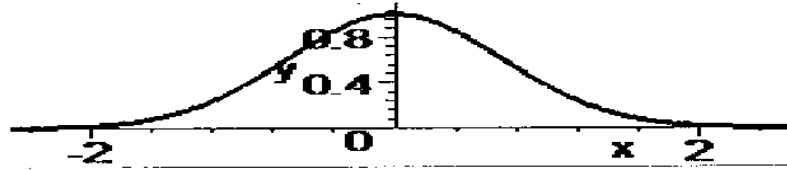
$$I^2 = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

miền lấy tích phân ở đây là vòng tròn tâm O, bán kính là vô hạn $R = \infty$

$$I^2 = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{\theta=2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{e^{-u}}{2} \right) \Big|_{u=0}^{u=\infty} = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}, \text{ từ đây suy ra, nếu ta tịnh tiến thì:}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} dx = \sqrt{\pi}}$$



Ví dụ 7. Tính $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$, do đổi biến một tí.

Ví dụ 8: Tính $I = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(-x^2-y^2+xy)} dx dy = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

$$I = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(-x^2-y^2+xy)} dx dy = \int_{y=-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi} e^{-\frac{3}{4}y^2} dy = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

Xem ví dụ sau.

Ví dụ 9: Tính $I = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{(-x^2-y^2+xy)} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi}{\sqrt{|A|}}$,

do đổi biến một tí về dạng toàn phương

$$-x^2 - y^2 + xy = -(x^2 - xy) - y^2 = -\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4} - y^2, \text{ và } \det(A) = |A| = \frac{3}{4}$$

$$-x^2 - y^2 + xy = -(x^2 + y^2 - xy) = -[x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -X^T A X$$

Ví dụ 10: Tích phân suy rộng tổng quát:

$$I_N = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-(x, Ax)} dx = \frac{(\sqrt{\pi})^N}{\sqrt{|A|}}$$

Để tiện ta kí hiệu: $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} dx_N$

A là ma trận đối xứng và xác định dương nên có A^{-1} và $A = A^T$,

$$I_N = \int_{x_N=-\infty}^{x_N=\infty} \int_{x_{N-1}=-\infty}^{x_{N-1}=\infty} \dots \left[\int_{x_2=-\infty}^{x_2=\infty} \left(\int_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} e^{-(x, Ax)} dx_1 \right) dx_2 \right] \dots dx_{N-1} dx_N =$$

$$= \frac{\pi^{N/2}}{|A|^{1/2}} = \frac{(\sqrt{\pi})^N}{\sqrt{|A|}}.$$

Ví dụ 11: Tích phân suy rộng tổng quát: $I_3 = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-(x, Ax)} dx_1 dx_2 dx_3$

$$I_3 = \int_{x_3=-\infty}^{x_3=\infty} \int_{x_2=-\infty}^{x_2=\infty} \left(\int_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} e^{-\left(2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3\right)} dx_1 \right) dx_2 dx_3$$

trong đó: N=3

$$(x, Ax) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, |A| = 7$$

Vậy A đ/x và xác định dương, $I_3 = \frac{\pi^{N/2}}{|A|^{1/2}} = \frac{\pi^{3/2}}{|7|^{1/2}} = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{\sqrt{7}}$

Có thể phân tích như sau, và áp dụng công thức trên để kiểm chứng.

$$2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 2\left(x_1 - x_3 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{7x_2^2}{2} + x_3^2$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} \sqrt{\pi} = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{\sqrt{7}}$$

Ví dụ 12: Tích phân suy rộng tổng quát:

$$I_3 = \int_{x_3=-\infty}^{x_3=\infty} \int_{x_2=-\infty}^{x_2=\infty} \left(\int_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} e^{-49x_1^2 - 28x_2^2 - 92x_3^2 + 16x_1x_2 + 120x_1x_3 + 24x_2x_3} dx_1 \right) dx_2 dx_3$$

$$-49x_1^2 - 28x_2^2 - 92x_3^2 + 16x_1x_2 + 120x_1x_3 + 24x_2x_3 =$$

$$= -92\left(x_3 - \frac{3x_2}{23} - \frac{15x_1}{23}\right)^2 - \frac{608}{23}\left(x_2 - \frac{91x_1}{152}\right)^2 - \frac{15x_1^2}{38}$$

$$\implies I_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{92}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{608}{23}}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{15}{38}}} = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{8\sqrt{15}}. \text{ Hay}$$

$$A = \begin{bmatrix} -49 & 8 & 60 \\ 8 & -28 & 8 \\ 60 & 8 & -92 \end{bmatrix}, \quad ||A|| = |-960| = 960 \implies I_3 = \frac{\pi^{N/2}}{|A|^{1/2}} = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{8\sqrt{15}}$$

BÀI 3: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN KÉP

Tính diện tích và thể tích là xuất phát của tích phân kép. Ở đây ta xét các ứng dụng khác, tính các đặc trưng vật lý trên diện tích và thể tích.

3.1 Momen quán tính của tấm phẳng :

Mật độ khối lượng tại điểm (x, y) là hàm $\delta(x, y)$ thì các momen quán tính theo các trục chính là :

$$J_x = \iint_D \delta(x, y) y^2 dx dy, \quad J_y = \iint_D \delta(x, y) x^2 dx dy,$$

Đối với trục $oz \perp (oxy)$ thì: $J_{oz} = \iint_D \delta(x, y) (x^2 + y^2) dx dy$

• Đối với vật thể đa giác: Nhớ: điểm $M_{n+1} \equiv M_1$, $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$

$$J_{Ox} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \left[(y_i + y_{i+1})^2 - y_i y_{i+1} \right]$$

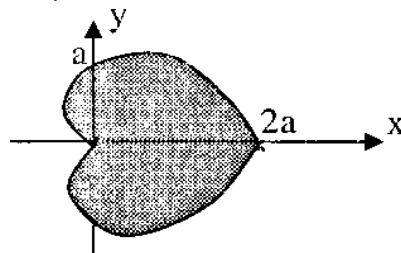
$$J_{Oy} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \left[(x_i + x_{i+1})^2 - x_i x_{i+1} \right]$$

Ví dụ 1 : tìm J_y của hình D giới hạn bởi $y^2 = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$ với mật độ khối lượng là $\delta(x, y) = y$

$$J_y = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x}} y \cdot x^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) = \frac{1}{24}$$

Ví dụ 2 : tính J_x của cardioid, có phương trình là :

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad \delta(x, y) = 1$$



ta có $J_x = \iint_D y^2 dx dy$, đổi sang tọa độ cực ta có $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$,

$$J_x = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{a(1+\cos\varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi)^4 \cdot d\varphi = \frac{21}{32} \pi a^4$$

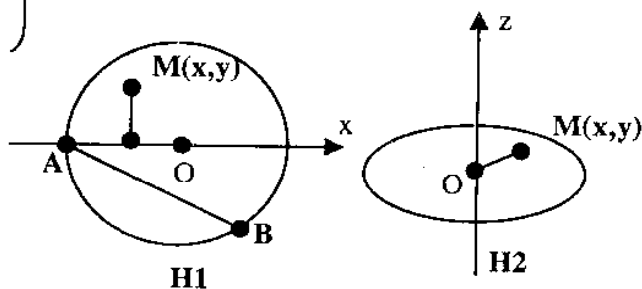
Ví dụ 3: Tìm momen quán tính J_x (đối với trục ox , H1), J_{oz} (H2) và trục bất kỳ qua điểm A, thẳng góc với hình D (H1), giới hạn bởi $x^2 + y^2 = R^2$ với mật độ khối lượng là $\delta(x, y) = 1$.

• Tìm J_x (đối với trục ox , H1). Do đối xứng. Nên ta tính 1/4 hình vẽ:

$$J_x = 4 \left(\int_0^R dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} 1 \cdot y^2 dy \right)$$

$$I = \int_0^R dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} 1 \cdot y^2 dy =$$

$$= \int_0^R \frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx,$$



đặt $x = R \sin \varphi$

$$I = \frac{R^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{R^4}{3} \frac{3!!}{4!!} \frac{\pi}{2} = \frac{R^4 \pi}{16} \Rightarrow J_x = \frac{R^4 \pi}{4} = \frac{mR^2}{4}$$

Trong đó: $m = \delta R^2 \pi = R^2 \pi$ là trọng lượng của đĩa tròn.

Tọa độ cực: $J_x = 4 \left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r=0}^R r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr \right) = \frac{R^4 \pi}{4} = \boxed{\frac{mR^2}{4}}$

• Tìm J_x . Đối với trục $oz \perp (oxy)$, (H2) thì: $J_{oz} = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy =$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^R r^2 \cdot r dr = \frac{R^4 \pi}{2} = \boxed{\frac{mR^2}{2}}$$

Trong đó: $m = \delta R^2 \pi = R^2 \pi$ là trọng lượng của đĩa tròn.

• Đối với trục oz qua $A \perp (oxy)$, (H1) thì: $J_{oz} = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy =$

$$= \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r=0}^{r=2R \cos \varphi} r^2 \cdot r dr = 2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} 4R^4 \cos^4 \varphi d\varphi = 8R^4 \frac{3.1}{4.2} \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{3R^4 \pi}{2} = \boxed{\frac{3mR^2}{2}}. \text{ Vậy nếu luận về "sự quay dễ dàng hay không?" thì:}$$

==> Trường hợp 1 > Trường hợp 2 > Trường hợp 3.

Ví dụ 4. Tìm momen quán tính của hình vành khăn có 2 bán kính $a < R$

a) Đối với trục ox trong mặt phẳng (H3)

b) Đối với trục oz thẳng góc với mặt phẳng (H4).

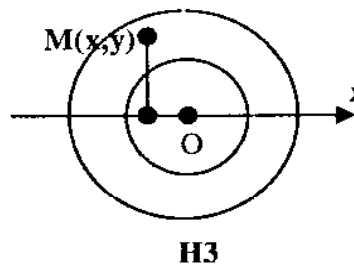
Giải:

a/ $J_{ox} = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy =$

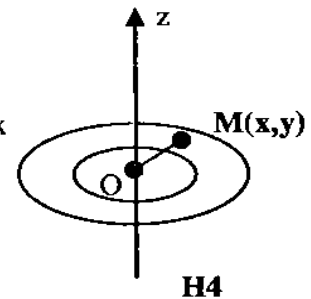
$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{r=a}^{r=R} r^2 (r dr) =$$

$$= 4 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{R^4 - a^4}{4} \right) = \left(\frac{R^4 - a^4}{4} \right) \pi =$$

$$= \boxed{\left(R^2 + a^2 \right) \frac{m}{4}}, \quad m = \pi (R^2 - a^2)$$



H3



H4

b/

$$J_{oz} = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{r=a}^{r=R} r^2 (r dr) = \pi \frac{R^4 - a^4}{2} =$$

$$\boxed{\left(R^2 + a^2 \right) \frac{m}{2}}$$

Chú ý: Khi $a=0$ thì ví dụ 3 là trường hợp riêng của ví dụ 4.

Ví dụ 5. Tìm momen quán tính của hình vuông có cạnh $R\sqrt{2}$

a) Đối với trục oy thẳng góc với mặt phẳng tại điểm O. (H5)

b) Đối với trục ox nằm trong mặt phẳng (H6)

c) Đối với trục oz thẳng góc với mặt phẳng (H7).

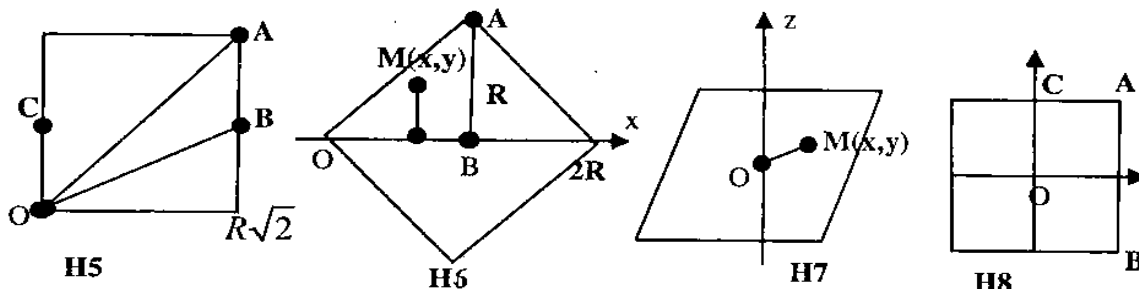
d) Đối với trục oz tại điểm C (giữa cạnh) thẳng góc với mặt phẳng (H5).

Giải:

a/ Hình (H5):

$$J_{oy} = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{x=0}^{x=R\sqrt{2}} \int_{y=0}^{y=R\sqrt{2}} (y^2 + x^2) dx dy =$$

$$= \frac{8R^4}{3} = \boxed{\frac{4mR^2}{3}}, \text{ với } m = \delta(R\sqrt{2})^2 = 2R^2 \text{ là trọng lượng của đĩa vuông.}$$



Cách khác: tọa độ cực: $x_B = R\sqrt{2} = r \cos \varphi \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{2}}{\cos \varphi}$

$$J_{oy} = \iint_{D_{xy}} r^2 r dr d\varphi = 2 \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{r=\frac{R\sqrt{2}}{\cos \varphi}} r^3 dr \right) = 2 \frac{4R^4}{3} = \frac{8R^4}{3} = \boxed{\frac{4mR^2}{3}},$$

b/ Hình (H6): $OA = R\sqrt{2}, BA = R$

$$J_{ox} = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy = \int_{y=0}^{y=R} \int_{x=y}^{x=-y+2R} y^2 dx dy = \frac{R^4}{6} = \boxed{\frac{mR^2}{12}}, \text{ với}$$

$m = \delta(R\sqrt{2})^2 = 2R^2$ là trọng lượng của đĩa vuông.

c/ Hình (H7, H8): $AB = R\sqrt{2} \Rightarrow OC = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$$J_{oy} = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_{x=0}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_{y=0}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} (y^2 + x^2) dx dy =$$

$$= \frac{R^4}{6} = \boxed{\frac{mR^2}{12}}, \text{ với } m = \delta(R\sqrt{2})^2 = 2R^2 \text{ là trọng lượng của đĩa vuông.}$$

d/ Sinh viên tự giải.

\Rightarrow H6 quay dễ như hình H7 và hình H5 khó quay nhất. Và ta có thể so sánh sự quay của hình vuông và hình tròn qua ví dụ 3 và ví dụ 5.

3.2 Momen tĩnh và trọng tâm :

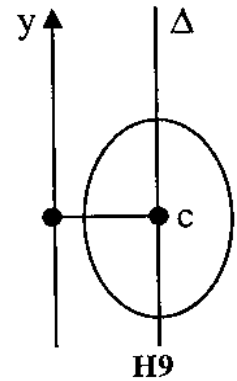
Từ định nghĩa của biểu thức momen quán tính, ta nhận ra rằng momen quán tính biểu hiện tính ì nội tại của chất điểm có khối lượng $\delta(x,y) > 0$

khi chuyển động quay quanh một trục nào đó, nhưng bản thân nó chưa biểu diễn được sự cân bằng tĩnh học đối với trục đó ra sao? mức độ khả thi khi quay quanh trục đó ra sao? và vì vậy một khái niệm về nó là momen tĩnh và tọa độ trọng tâm được định nghĩa như sau :

• Momen tĩnh đối với trục x là $S_x = \iint_D y \delta(x, y) dx dy$

• Momen tĩnh đối với trục y là $S_y = \iint_D x \delta(x, y) dx dy$

• Tọa độ trọng tâm C : $x_c = \frac{S_y}{S}$, $y_c = \frac{S_x}{S}$



Với $\delta(x, y)$ mật độ khối lượng tại điểm (x, y) và

$$S = \iint_D \delta(x, y) dx dy \text{ là diện tích miền D.}$$

• Đối với vật thể đa giác: $S_{Ox} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (y_i + y_{i+1})$

$$S_{Oy} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (x_i + x_{i+1})$$

Nhớ: điểm $M_{n+1} \equiv M_1$, $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$

Thật vậy theo định lý trung bình ta có:

$$S_y = \iint_D x \delta(x, y) dx dy = x_C \iint_D \delta(x, y) dx dy = x_C \cdot S \Rightarrow x_C = \frac{S_y}{S}$$

$$S_x = \iint_D y \delta(x, y) dx dy = y_C \iint_D \delta(x, y) dx dy = y_C \cdot S \Rightarrow y_C = \frac{S_x}{S}$$

Nhận xét :

- Momen quán tính luôn luôn dương.
- Momen tĩnh có thể âm, dương, momen tĩnh đối với 1 trục nào đó mà triệt tiêu thì trục đó gọi là trục trung hòa, giao của 2 trục trung hòa bất kỳ chính là tọa độ trọng tâm.

Thật vậy gọi Δ (H9) là trục trung hòa thì

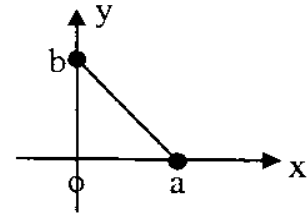
Công thức đổi trục ta có: $x = x_C + x_\Delta$,

$$S_y = \iint_D x dx dy = \iint_D (x_C + x_\Delta) dx dy = x_C \iint_D dx dy + \iint_D x_\Delta dx dy =$$

$$= x_C S + \iint_D x_\Delta dx dy = S_y + \iint_D x_\Delta dx dy \Rightarrow \iint_D x_\Delta dx dy = S_\Delta = 0$$

• Momen quán tính đối với trục trung hòa thì nhỏ nhất so với các trục // với trục trung hòa.

Ví dụ 1: tìm trọng tâm của 1 tam giác đồng chất như hình vẽ bên.



ta có phương trình đường thẳng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, diện tích $S = \frac{1}{2} ab$

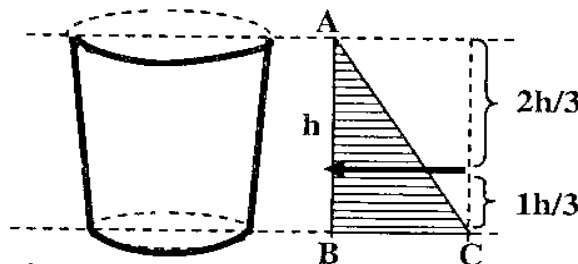
$$S_y = \iint_D x dx dy = \int_0^a x dx \int_0^{y=b(1-\frac{x}{a})} dy = \int_0^a x b (1 - \frac{x}{a}) dx = \frac{bx^2}{2} - \frac{b}{a} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a =$$

$$= \frac{ba^2}{2} - \frac{ba^2}{3} = \frac{ba^2}{6}. \text{ Vậy } x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{ba^2}{6} / \frac{1}{2} ab = \frac{1}{3} a,$$

tương tự ta có $y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{1}{3} b$

Một lần nữa ta tìm lại được kết quả mà trong hình sơ cấp đã biết.

Ap dụng: Các cột tháp nước cao để tăng áp lực nước cho một khu vực dân cư nào đó thì mật cắt ngang với độ cao là $\frac{1}{3}$ chiều cao cột nước thường được gia cường nhiều hơn những mật cắt ngang khác, lý do là áp lực nước tác dụng vào thành cột nước thì tỉ lệ tuyến tính với độ sâu cột nước

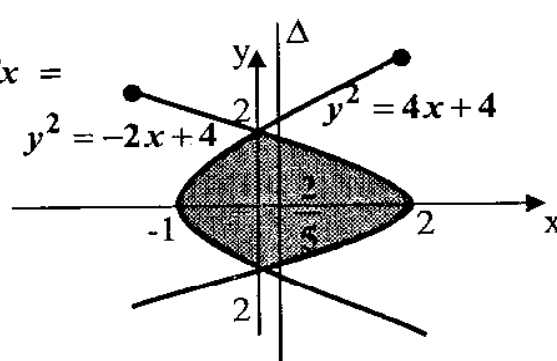


Áp lực lớn nhất đặt tại trọng tâm tam giác ABC

Trong các vụ án đánh bom liều chết của các chiến binh đạo hồi, có vụ: "Binladel" lao máy bay vào 2 tòa nhà tháp đôi của Mỹ, ngày

11/9/2001, làm rúng động khắp thế giới ngay đó. Viên phi công liều chết, áp dụng định lý trọng tâm, đã lao đúng vào trọng tâm tòa nhà (khoảng 1/3 chiều cao tòa nhà), với sức nóng do ma sát, cộng với sức nóng của vụ nổ, đã làm cho các sợi thép trong các cột bê tông nóng chảy ở tầng bị tấn công, bê tông trở nên dòn và xốp (vì bê tông chịu nén, và thép chịu kéo), do đó 2 vật liệu này coi như không làm việc, và vì thế sức nặng của 2/3 khối lượng tòa nhà ở trên đã chẻ 1/3 tòa nhà còn lại ở dưới ra tan tành từng mảnh vụn, và vì tòa thứ 2 có cùng nền móng với tòa thứ nhất, nên chỉ vài phút sau đó, thì tòa thứ 2 cũng cùng chung số phận.

Ví dụ 2: tìm tọa độ trọng tâm của hình phẳng đồng chất giới hạn bởi 2 đường cong sau $y^2 = 4x + 4$ và $y^2 = -2x + 4$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích } S &= \iint_D dx dy = \int_{-2}^2 dy \int_{x=\frac{y^2}{4}-1}^{x=-\frac{y^2}{2}+2} dx = \\ &= 2 \int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4} \right) dy = \\ &= 2 \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{4}y^2 \right) dy = 8 \end{aligned}$$


$$S_y = 2 \int_{y=0}^{y=2} dy \int_{x=\frac{y^2-4}{4}}^{x=\frac{4-y^2}{2}} x dx = 2 \int_{y=0}^{y=2} \left(\frac{3}{2} - \frac{3y^2}{4} + \frac{3}{32}y^4 \right) dy$$

$$S_y = \int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{2} + \frac{3}{16}y^4 \right) dy = 3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3y^5}{80} \Big|_0^2 = \frac{16}{5}$$

$$x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{2}{5}, \quad y_c = 0 \text{ là rõ ràng do tính chất đối xứng} \blacksquare$$

Ví dụ 3: Tìm tọa độ trọng tâm và moment quán tính đối với trục trung hòa của nó, của hình phẳng đồng chất có tọa độ như hình vẽ. Có 8 điểm, điểm thứ 9 trùng với điểm thứ nhất. A1(1,0), A2(2,0), A3(2,3), A4(3,3), A5(3,4), A6(0,4), A8(1,3), A9(1,0).

a) Ta áp công thức với 9 điểm (tính bằng Vn-570MS)

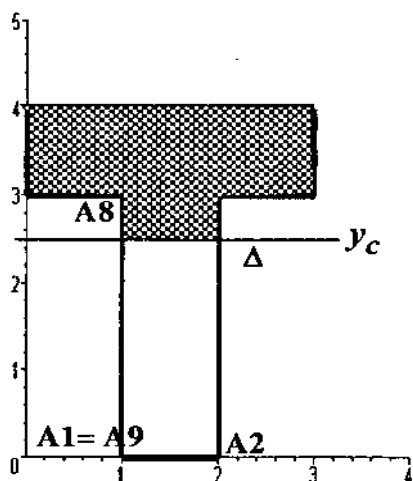
$$S_x = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{i=9} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (y_i + y_{i+1}) = \frac{90}{6} = 15,$$

Tính theo tích phân: $S_x = \iint_{D_1} y dx dy + \iint_{D_2} y dx dy = \frac{9}{2} + \frac{21}{2} = 15$, do tách:

Hình chữ nhật dưới: $\iint_{D_1} y dx dy = \int_{x=1}^{x=2} dx \int_{y=0}^{y=3} y dy = \frac{9}{2}$

Hình chữ nhật trên: $\iint_{D_2} y dx dy = \int_{x=0}^{x=3} dx \int_{y=3}^{y=4} y dy = \frac{21}{2}$

Diện tích hình $S = 3 \times 1 + 3 \times 1 = 6$ hay ta có thể dùng công thức:



tt	x	y	Moment tính	Moment quán tính
A1	1	0		
A2	2	0	0	0
A3	2	3	18	54
A4	3	3	-18	-81
A5	3	4	21	111
A6	0	4	96	576
A7	0	3	0	0
A8	1	3	18	-81
A9	1	0	-9	-27
		Σ	90	552
Bảng A				46

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=9} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{12}{2} = 6.$$

Vậy $y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{15}{6} = 2.5$ Đây tung độ của trục tung hòa Δ như hình vẽ.

Thực ra ta có thể tìm trọng tâm của hình bằng cách lấy điểm giữa đoạn nối hai trọng tâm hình chữ nhật trên và dưới bằng nhau, ta cũng thu ngay được kết quả trên $y_c = 2.5$. Với phương pháp này ta có thể tìm trọng tâm bất kỳ hình nào, bằng cách phân hình ra nhiều mảnh, mà mỗi mảnh ta đã biết trọng tâm của chúng, lần lượt tìm trọng tâm nối 2 mảnh một, theo tỉ trọng của diện tích 2 mảnh đó, và cứ thế

Đây là dầm cầu đúc sẵn chữ T, được lắp ghép để thành mặt cầu trong các công trình cầu đường. Khi có tải trọng thì phần trên trục trung hòa của dầm sẽ bị nén, ngược lại phần dưới trục trung hòa của dầm sẽ bị kéo.

b) Đối với moment quán tính, ta áp công thức với 9 điểm như cột B ở bảng trên được tính bằng excel, hay tính bằng Vn-570MS.

$$J_x = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{i=9} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \left[(y_i + y_{i+1})^2 - y_i y_{i+1} \right] = \frac{552}{12} = 46,$$

Tính theo tích phân: $J_x = \iint_{D_1} y^2 dx dy + \iint_{D_2} y^2 dx dy = 9 + 37 = 46$, do

$$\text{Hình chữ nhật dưới: } \iint_{D_1} y^2 dx dy = \int_{x=1}^{x=2} dx \int_{y=0}^{y=3} y^2 dy = 9$$

$$\text{Hình chữ nhật trên: } \iint_{D_2} y^2 dx dy = \int_{x=0}^{x=3} dx \int_{y=3}^{y=4} y^2 dy = 37$$

c) Để tính moment quán tính đối với trục trung hòa Δ , ta có thể dùng định lý Huygen trong vật lý về đối trục trong công thức tính moment quán tính:

$$46 = J_x = J_{\Delta} + a^2 F = J_{\Delta} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 6 \Rightarrow J_{\Delta} = 46 - \frac{150}{4} = 8.5$$

Để tính trực tiếp ta dùng công thức đối trục: $y = Y_{\Delta} + a \Rightarrow Y_{\Delta} = y - 2.5$, và sau đó ta tính tương tự như bảng A trên một lần nữa, ta có:

	y	x	$Y_{\Delta} = y - 2.5$	Moment tĩnh	Moment quán tính
A1	0	1	-2.5		
A2	0	2	-2.5	-12.5	46.875
A3	3	2	0.5	-12	31.5
A4	3	3	0.5	-0.5	-0.375
A5	4	3	1.5	6	9.75
A6	4	0	1.5	13.5	30.375
A7	3	0	0.5	0	0
A8	3	1	0.5	-0.5	-0.375
A9	0	1	-2.5	6	-15.75
			Σ	0	102
Bảng B					8.5

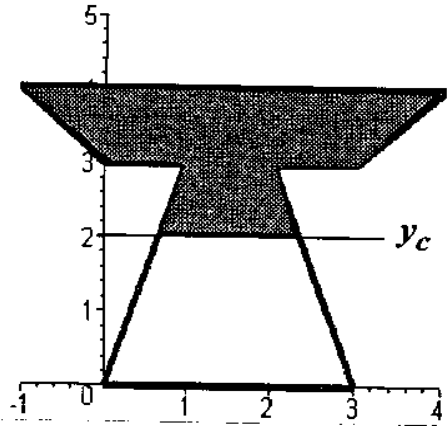
Xem bảng ta thấy lại kết quả: **Moment tĩnh đối với Δ thì triệt tiêu**, và

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{i=9} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \left[(y_i + y_{i+1})^2 - y_i y_{i+1} \right] = \frac{102}{12} = 8.5 \quad \blacksquare$$

Ví dụ 4: Tìm tọa độ trọng tâm và moment quán tính đối với trục trung hòa của nó theo hình vẽ có tọa độ như hình sau: A1(0,0), A2(3,0), A3(2,3), A4(3,3), A5(4,4), A6(-1,4), A7(0,3), A8(1,3).

Sinh viên tự giải. $J_x = \frac{768}{12} = 66$, $S=10$

$$S_x = \frac{130}{6} \Rightarrow y_c = \frac{130}{6 \times 10} = \frac{13}{6} = 2.1666$$



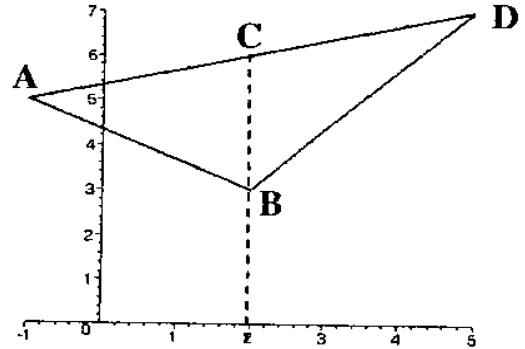
Ví dụ 5: Tìm tọa độ trọng tâm và moment quán tính đối với trục Oy theo hình vẽ có tọa độ như hình sau: B(2,3), D(5,7), A(-1,5), B(2,3). Nghiệm lại bằng công thức giải tích.

Diện tích S:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{18}{2} = 9$$

Moment tính:

$$S_x = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{i=3} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (y_i + y_{i+1}) = \frac{270}{6} = 45$$



$$S_y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{i=3} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (x_i + x_{i+1}) = \frac{108}{6} = 18$$

Vậy $y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{45}{9} = 5$, $x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{18}{9} = 2$

$$J_{Oy} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{i=3} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \left[(x_i + x_{i+1})^2 - x_i x_{i+1} \right] = \frac{594}{12} = 49.5$$

Ta chỉ nghiệm lại moment quán tính /Oy: ta chia thành 2 vùng

$$\iint_{ABC} x^2 dx dy = \int_{x=-1}^{x=2} dx \int_{y=\frac{-2x+13}{3}}^{y=\frac{x+16}{3}} x^2 dy = \int_{x=-1}^{x=2} x^2 (x+1) dx = \frac{27}{4}$$

$$\iint_{BDC} x^2 dx dy = \int_{x=2}^{x=5} dx \int_{y=\frac{4x+1}{3}}^{y=\frac{x+16}{3}} x^2 dy = \int_{x=2}^{x=5} x^2 (-x+5) dx = \frac{171}{4}$$

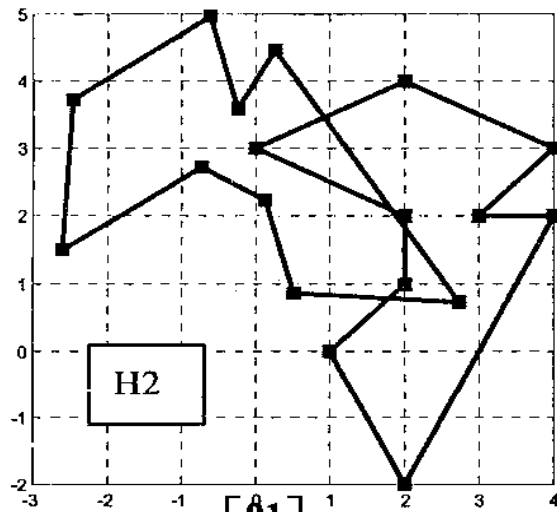
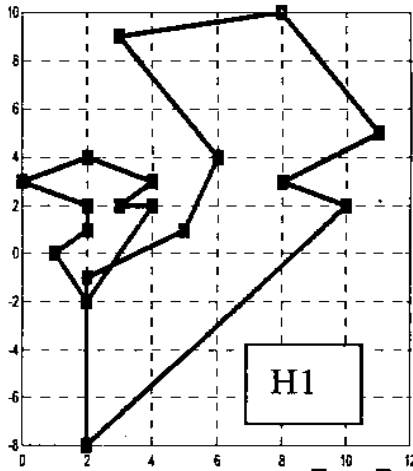
Vậy $J_{Oy} = \frac{27+171}{4} = 49.5$

Ví dụ 6: Tìm tọa độ trọng tâm của hai hình: hình gốc và hình biến hình, mà ta đã xét ở ví dụ 2, mục 2.2, có các tọa độ theo bảng:

TT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	4	3	4	2	0	2	2	1
y	0	-2	2	2	3	4	3	2	1	0

được biến hình qua phép biến đổi tuyến tính có ma trận tương ứng là

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$



trọng tâm hình gốc: $\begin{bmatrix} 34 \\ 15 \\ 23 \\ 15 \end{bmatrix}$, trọng tâm hình biến: $\begin{bmatrix} 91 \\ 15 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow H1$

Chú ý ta có: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 \\ 15 \\ 23 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91 \\ 15 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$? Và nếu lấy: $G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ làm

phép biến hình thì trọng tâm hình gốc vẫn là: $\begin{bmatrix} 34 \\ 15 \\ 23 \\ 15 \end{bmatrix}$, trọng tâm hình biến:

$\begin{bmatrix} -0.194572 \\ 2.729657 \end{bmatrix} \rightarrow H2$, ta vẫn có $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 \\ 15 \\ 23 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.194572 \\ 2.729657 \end{bmatrix}$

BÀI TẬP

1/ Tính các tích phân sau:

$$a/ I = \int_0^1 \int_2^3 (x-y)y dy dx \quad \text{và} \quad J = \int_2^3 \int_0^1 (x-y)y dx dy$$

so sánh I và J

$$b/ \text{Cho } K = \int_0^1 \int_0^x (x-y)y dy dx \quad \text{và} \quad L = \int_0^x \int_0^1 (x-y)y dx dy .$$

So sánh K và L, từ đó cho kết luận.

$$c/ \text{Chứng minh : } \int_0^1 \int_0^x (x-y)y dy dx = \int_0^1 \int_y^1 (x-y)y dx dy$$

2/ Hoán vị cận tích phân sau:

$$a/ \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x,y) dy \quad b/ \int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y) dx \quad c/ \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy$$

3/ Tính các tích phân sau:

$$a) \iint_D (\cos^2 x + \sin^2 y) dx dy, \quad D \text{ là hình vuông: } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$$

$$b) \iint_D x \ln y dx dy. \quad D \text{ là hình chữ nhật } 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq e$$

$$c) \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^3}. \quad D \text{ xác định bởi } x \geq 1, \quad y \geq 1, \quad x+y \leq 3$$

$$d) \iint_D x^2(y-x) dx dy. \quad D \text{ giới hạn bởi các đường } y = x^2, \quad x = y^2$$

4/ Tính các tích phân sau:

$$a) \iint_D (x+y)^3(x-y) dx dy. \quad D \text{ giới hạn bởi:}$$

$$x+y=1, \quad x-y=1, \quad x+y=3, \quad x-y=-1$$

$$b) \iint_D (2x-y) dx dy. \quad D \text{ giới hạn bởi}$$

$$x+y=1, \quad x+y=2, \quad 2x-y=1, \quad 2x-y=3$$

$$c) \iint_D xy dx dy. \quad D \text{ giới hạn bởi}$$

$$xy=1, \quad xy=2, \quad y=x, \quad y=3x \quad (x > 0, \quad y > 0)$$

$$d) \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy. \quad D \text{ giới hạn bởi:}$$

$$x^2+y^2=a^2, \quad x^2+y^2=4a^2 \quad (a > 0)$$

e) $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$. D giới hạn bởi $y = \sqrt{1 - x^2}$ và ox

f) $\iint_D xy^2 dx dy$. D giới hạn bởi các đường tròn:

$x^2 + (y - 1)^2 = 1$, và $x^2 + y^2 - 4y = 0$

g) $\iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy$. D là miền $x^2 + y^2 \leq a^2$

h) $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$. D là Ellip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

5/ Tính diện tích phẳng giới hạn bởi các đường :

a) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$

b) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

c) $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$ ($0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$)

d) $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$

e) $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}x$

6/ Tính thể tích giới hạn bởi các mặt :

a) $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ nằm trong phần tám thứ nhất.

b) $x^2 + y^2 = 2$, $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$

c) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$

d) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$

e) $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

7/ Tính momen quán tính của :

a/ Hình vành khăn có các bán kính d, D , $d < D$, $\delta = 1$ (tỉ khối).

• Đối với tâm của nó

• Đối với đường kính của nó

b/ Tìm momen quán tính của hình vuông cạnh a đối với trục đi qua đỉnh của nó, trục giao đối với mặt phẳng của hình vuông, $\delta = 1$

c/ Tìm momen quán tính của miền giới hạn $xy = 4$, $x + y = 5$, $\delta = 1$, đối với đường thẳng $y = x$.

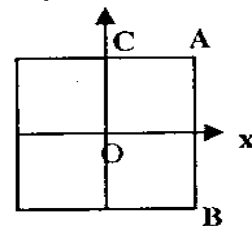
8/ Xác định trọng tâm các bản phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

b) $y^2 = x$, $x^2 = y$

c) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$

9/ Tìm moment quán tính của hình vuông bên với trục Ox :



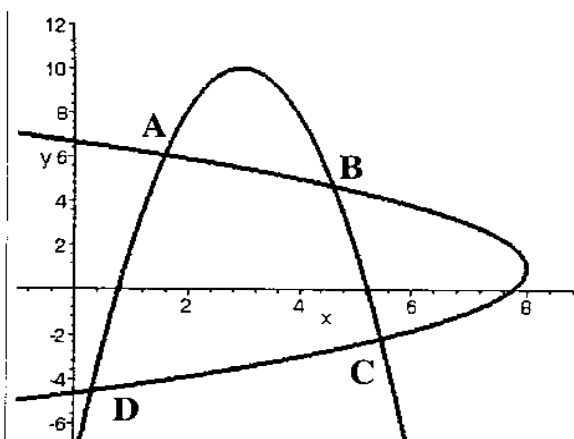
H8

10/ Tìm diện tích giao bởi 2 đường:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 12x - 8 \\ x = -\frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} + \frac{31}{4} \end{cases}$$

11/ Tính

$$I = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{(-2x^2 - 3y^2 + 2xy)} dx dy$$



TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đình Trí và nhiều tác giả khác.
Toán cao cấp. Tập II, III. NXB ĐH và THCN. 1984.
2. Ngô Thành Phong. Giáo trình toán cao cấp.
ĐHKHTN. 2003.
3. Đỗ Công Khanh. Giáo trình đại số tuyến tính.
ĐHBK. 2003.
4. Nguyễn Phú Vinh. Các giáo trình Toán cao cấp. ĐHCN. 2006.
- 5 Nguyễn Như Phong. Hoạch định vật tư tồn kho. NXBKT.2007