SỐ PHỨC TRONG HÌNH HỌC

Phan Minh Chính[*], *Nguyễn Phú Vinh*[**]

TÓM TẮT

Một mảng thú vị của số phức là ứng dụng vào hình học, nhất là biểu diễn phức trong các phép biến đổi hình học. Trong bài báo này, có một số lời giải bài toán chứng tỏ biểu diễn phức rất cô đọng, dễ dàng và trong sáng. Trong khi đó, với công cụ hình học giải tích hay hình học cổ điển khó có thể tìm được một lời giải như thế. Một phép biến đổi hình học mà ít sinh viên làm quen và biết đến là phép biến đổi nghịch đảo, mà nhờ nó đã giải quyết được một số bài toán hóc búa và thú vị, cũng xin được trình bày ở đây.

THE COMPLEX IN GEOMETRY

SUMMARY

One of the interesting fields of complex numbers is applied to the geometry, the most of them is expressed in geometric transformations. In this paper, some solutions of the problem demonstrates the performance of complex numbers is succinct, easy and clear. While it is difficult to find that solution with analysis geometry or pure geometry. A geometric transformation that few students were familiar and known to be the inverse transformation, but because of it that we has solved some interesting conundrum, this transformation would also be presented here.

I. MỞ ĐẦU

Số phức trong chương trình đại học năm thứ nhất chỉ học rất cơ bản. Sau đó, chỉ một số ít sinh viên ngành điện, điện tử tiếp tục học hàm phức và phép biến đổi Laplace. Nhưng một mảng thú vị của số phức là ứng dụng vào hình học, nhất là biểu diễn phức trong các phép biến đổi hình học. Trong bài bài báo này, có một số lời giải bài toán chứng tỏ biểu diễn phức rất cô đọng, dễ dàng và trong sáng. Trong khi đó, với công cụ hình giải tích hay hình cổ điển khó có thể tìm được một đáp án như thế. Một phép biến đổi hình học mà ít sinh viên làm quen và biết đến là phép biến đổi nghịch đảo, mà nhờ nó đã giải quyết được một số bài toán hóc búa và thú vị. Ví dụ bài toán Napoleon: tìm tâm đường tròn, được dấu tâm, chỉ bằng một compa duy nhất. Hay bài toán: cho bốn điểm bất kỳ trong mặt phẳng, tạo hai đường thẳng bằng cách nối hai cặp điểm bất kỳ tương ứng của bốn điểm đó, hãy tìm giao điểm của hai đường thẳng này chỉ bằng một compa.

II. SỐ PHỨC TRONG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH HỌC

Xét phép nghịch đảo (NĐ): Cho đường tròn (O, R^2), đường thẳng (d) không qua O, ta tìm ảnh của (d).

- Qua phép nghịch đảo: NĐ (O, $k = R^2$), tâm O, hệ số $k = R^2$ (k luôn dương)

Tại hình H1: biến $A \to A$, $F \to C$, $B \to E$, vậy biến (d) thành đường tròn (I, OC/2) có đường kính OC, qua tâm O và OI $\perp$(d). Và ngược lại biến đường tròn (I, OC/2) thành (d). Nếu có F $\to$ xác định C, nghĩa là xác định được (I, OC/2), và ngược lại. Với $OF < R$ nên (d) cắt vòng tròn (O, R).

---

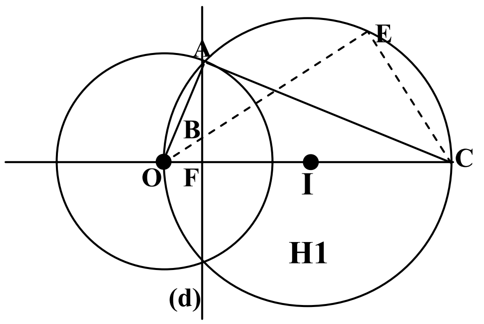
[*] ThS, Khoa Cơ bản, Trường Đại học Công nghiệp TPHCM

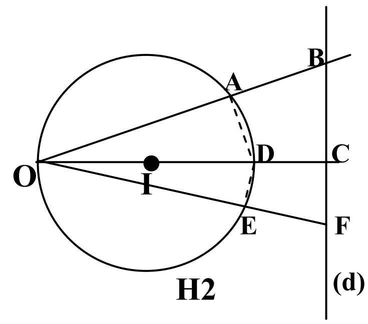
[**] TS, Khoa Cơ bản, Trường Đại học Công nghiệp TPHCM

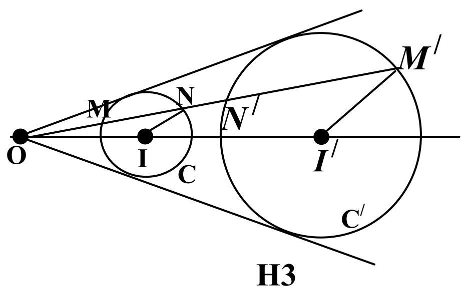
• Qua phép nghịch đảo: NĐ (O, $\overline{OC}.\overline{OD}$), tâm O, hệ số nghịch đảo $\overline{OC}.\overline{OD}$.

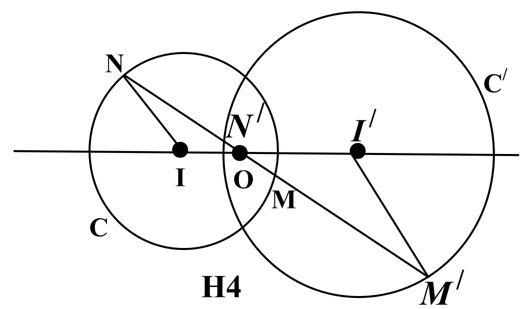
Tại hình H2: biến B → A, C → D, F → E, vậy biến (d) thành đường tròn (I, OD/2) có đường kính OD, qua tâm O và OI ⊥ (d), và ngược lại.

Nếu có C → xác định D, nghĩa là xác định được (I, OD/2), và ngược lại. Với OC > R nên (d) không cắt vòng tròn (O, R).









• Tại hình H3: Ngược lại nếu đường tròn tâm I không đi qua O, thì phép NĐ (O, R^2) sẽ biến đương tròn tâm I thành đường tròn khác, có tâm $I^{/}$ trên OI (xem hình H3), không qua tâm O: và ta chứng minh hai đường tròn này cũng là vị tự của nhau, sau đó ta tính tỉ lệ vị tự đó. Ta có $M \to M^{/}$, $N \to N^{/}$, nhưng $I \not\to I^{/}$.

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM^{/}} = k$, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OI^2 - R^2 = \sigma$ là phương tích, đã biết (phương tích của O đối với vòng I), chia vế ta có: $\dfrac{\overrightarrow{OM^{/}}}{\overrightarrow{ON}} = \dfrac{k}{\sigma} = \dfrac{\overrightarrow{OI^{/}}}{\overrightarrow{OI}}$ đây là tỉ lệ vị tự biến (I, IN) <--> ($I^{/}$, $I^{/}M^{/}$) và

$\overrightarrow{OI^{/}} = \dfrac{k}{\sigma}\overrightarrow{OI}$. Biết tâm I, tìm tâm $I^{/}$ qua phép vị tự (O, $\dfrac{k}{\sigma}$). Chú ý, điểm O nằm ngoài hai điểm I và $I^{/}$.

Trường hợp điểm O nằm trong vòng (I, IN) thì phương tích

P(O, (I, IN))=$OI^2 - R^2 = \sigma$ < 0, thì điểm O nằm giữa 2 điểm I và $I^{/}$. Hệ số vị tự âm, nhưng k vẫn dương $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM^{/}} = k = \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{ON^{/}} > 0$.

Số phức: ở hình H1: OB.OE=R^2, tọa vị của B là b=$\left(|b|, \arg(b)\right)$, tọa vị của E là e = $\left(|e|, \arg(e)\right)$, ta có: $b.\bar{e} = R^2 \Leftrightarrow e.\bar{b} = R^2$

$$\Rightarrow b = \frac{R^2}{\bar{e}} = R^2\left(\frac{1}{|\bar{e}|}, -\arg(\bar{e})\right)$$

$$= R^2\left(\frac{1}{|e|}, -(-\varphi)\right) = \left(\frac{R^2}{|e|}, \varphi\right)$$

vì O, B, E cùng thẳng hàng, nên B, E cùng argument. Vậy B là ảnh của NĐ(O, R^2) của E thì: $b = \frac{R^2}{\overline{e}} \Leftrightarrow e = \frac{R^2}{\overline{b}}$ hay gọn hơn $b.\overline{e} = R^2 \Leftrightarrow e.\overline{b} = R^2$.

Nếu tâm nghịch không là O mà là w, tỉ số k = 1 (dời gốc tọa độ) thì $z \leftrightarrow Z \Leftrightarrow Z - w = \frac{1}{\overline{z-w}}$

$$\Rightarrow Z = \frac{w\overline{z} + \left(1 - w\overline{w}\right)}{\overline{z} - \overline{w}}.$$

• Bây giờ cho có phép biến đổi $Z = \frac{1}{z}$ hãy biểu diễn hình học của phép biến đổi trên.

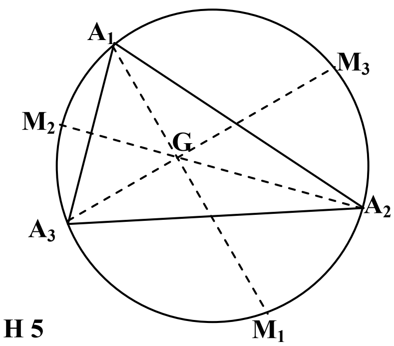
Ta có $Z = \frac{1}{z} = \frac{1}{\overline{\overline{z}}} = \frac{1}{\overline{(z_1)}}$ theo trên Z là dạng nghịch đảo của z_1, với $z_1 = \overline{z}$, vậy biến z thành đối xứng của z là z_1, sau đó lấy NĐ (O,1) của z_1 thành Z.

III. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1: Cho tam A_1 A_2 A_3 các đỉnh và trọng tâm G có tọa vị lần lượt là z_1, z_2, z_3, z, các trung tuyến cắt đường tròn ngoại tiếp tại các điểm M_1, M_2, M_3 (xem hình H5), có tọa vị u_1, u_2, u_3, chứng minh:

1/ $\frac{1}{z-u_1} + \frac{1}{z-u_2} + \frac{1}{z-u_3} = 0$ (*)

2/ Nếu cho trước các điểm M_1, M_2, M_3 bất kỳ trên đường tròn, chứng minh tam giác A_1 A_2 A_3 và trọng tâm G với các tọa vị và ý nghĩa kiến tạo tam giác A_1 A_2 A_3 như trên phải thỏa mãn đẳng thức (*) ở trên (thường có hai tam giác A_1 A_2 A_3 như trên ứng với bộ ba điểm M_1 M_2 M_3).



H 5

Từ đề bài trên ta có:

1/ $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$ nên $3z = z_1 + z_2 + z_3$

Hệ thức trong đường tròn ta có:

$\overrightarrow{GM_1}.\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GM_2}.\overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{GM_3}.\overrightarrow{GA_3} = OG^2 - R^2$ =k

Vậy M_i, A_i là ảnh của nhau qua NĐ(G, k)

$\overrightarrow{GA_1}.\overrightarrow{GM_1}$ =k nên $(z_1 - z)\left(\overline{u_1 - z}\right) = k$

$$\Rightarrow z_1 - z = \frac{k}{\overline{u_1 - z}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_1 - z} = \frac{1}{k}\overline{z_1 - z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z - u_1} = \frac{1}{k}\left(\overline{z} - \overline{z_1}\right)$$

tương tự

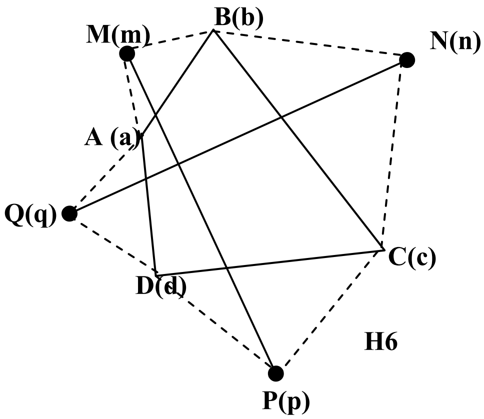
$$\frac{1}{z-u_2} = \frac{1}{k}\left(\overline{z} - \overline{z_2}\right), \frac{1}{z-u_3} = \frac{1}{k}\left(\overline{z} - \overline{z_3}\right)$$

$$\frac{1}{z-u_1} + \frac{1}{z-u_2} + \frac{1}{z-u_3} = \frac{1}{k}\left(3\overline{z} - \overline{z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3}\right) = 0$$

2/ Đảo lại từ $(z_1 - z)\left(\overline{u_1 - z}\right) = k$ ta suy ra $3z = z_1 + z_2 + z_3$, nên G là trọng tâm tam giác $A_1A_2A_3$. Chú ý từ phương trình $\frac{1}{z-u_1} + \frac{1}{z-u_2} + \frac{1}{z-u_3} = 0$, z là ẩn cần tìm của phương trình bậc 2 theo z này, thường có 2 nghiệm (tương ứng có 2 điểm G, nên có 2 tam giác $A_1A_2A_3$).

Bài toán 2: Cho tứ giác bất kỳ ABCD, dựng các tam giác vuông cân, lấy các cạnh của tứ giác làm cạnh huyền tương ứng, có các đỉnh M, N, P, Q có các tọa vị tương ứng như hình vẽ, chứng minh MP bằng và trực giao với QN (xem hình H6).

Để giải bài này, với công cụ hình giải tích hay thuần túy hình học, cũng không phải dễ dàng.



H6

Ta có $\overrightarrow{MB}$ là phép quay góc $\frac{\pi}{2}$ của $\overrightarrow{MA}$

nên b-m=i (a-m) $\Rightarrow m = \frac{b - ia}{1 - i}$, tương tự cho 3 đỉnh còn lại

$$n = \frac{c - ib}{1 - i}, p = \frac{d - ic}{1 - i}, q = \frac{a - id}{1 - i}$$

$$\Rightarrow i = \frac{m - p}{n - q} \Rightarrow m - p = i\left(n - q\right)$$

Vậy MP bằng và trực giao với QN.

Bài toán 3: Cho phép biến đổi $Z = \frac{z - i}{z + i}$, tìm ảnh của đường trục x'Ox. Nếu tọa vị z nằm trên trục x'Ox thì $|Z| = \left|\frac{z - i}{z + i}\right| = 1$, vậy Z nằm trên vòng tròn lượng giác. Ngược lại, tọa vị Z nằm trên vòng tròn lượng giác thì:

$$Z = e^{i\varphi} = \frac{z - i}{z + i} \Rightarrow z = -i\frac{e^{i\varphi} + 1}{e^{i\varphi} - 1} = -\cot g\frac{\varphi}{2},$$

vậy z là số thực. Vậy ảnh của đường trục x'Ox là vòng tròn lượng giác.

Bài toán 4: Cho phép biến đổi vòng (vì thường biến vòng tròn thành vòng tròn)

$$Z = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c\left(cz + d\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}},$$

ta sẽ tìm ảnh của đường tròn $I_0(O,1)$.

• $z \to z_1 = z + \frac{d}{c}$, đây là phép tịnh tiến với tọa vị $\frac{d}{c}$, biến $I_0(O,1)$ thành $I_1\left(0 + \frac{d}{c}, 1\right) = I_1\left(\frac{d}{c}, 1\right)$ (đường tròn, tâm có tọa vị $= \frac{d}{c}$, R = 1).

• $z_1 \to z_2 = \frac{1}{z_1}$, gồm hợp 2 phép biến đổi: đầu tiên biến $I_1\left(\frac{d}{c}, 1\right)$ --> $I_2\left(\frac{\bar{d}}{\bar{c}}, 1\right)$ là phép đối xứng qua Ox. Sau đó biến

$$I_2\left(\frac{\bar{d}}{\bar{c}}, 1\right) \dashrightarrow I_3\left(\frac{c\bar{d}}{d\bar{d} - c\bar{c}}, \frac{c\bar{c}}{\left|d\bar{d} - c\bar{c}\right|}\right),$$

qua phép NĐ (O, k = 1), thật vậy: từ

$$\overrightarrow{OI'} = \frac{k}{\sigma}\overrightarrow{OI}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OI_3} = \frac{1}{\sigma}\overrightarrow{OI_2} = \frac{c\bar{c}}{d\bar{d} - c\bar{c}} \cdot \frac{\bar{d}}{\bar{c}} = \frac{c\bar{d}}{d\bar{d} - c\bar{c}},$$

$$R_3 = \frac{1}{\sigma}R_2 = \frac{1}{\sigma}.1 = \frac{c\bar{c}}{d\bar{d} - c\bar{c}}$$

phương tích của O đối với đường tròn

$$I_2\left(\frac{\bar{d}}{\bar{c}}, 1\right),\ \sigma = OI_2^2 - 1^2 = \frac{d}{c}\frac{\bar{d}}{\bar{c}} - 1 = \frac{d\bar{d} - c\bar{c}}{c\bar{c}}$$

• $z_3 \to z_4 = \left(\frac{bc - ad}{c^2}\right)z_3$, nếu là số thực, thì đây là phép vị tự, nhưng đây là trường số phức, nên đây là phép đồng dạng với hệ số đồng dạng là $\frac{bc - ad}{c^2}$:

vậy $\overrightarrow{OI_4} = \frac{bc - ad}{c^2}\frac{c\bar{d}}{d\bar{d} - c\bar{c}} = \frac{\bar{d}}{c} \cdot \frac{bc - ad}{d\bar{d} - c\bar{c}}$, và

bán kính $R_4 = \left|\frac{bc - ad}{c^2}\right|\left|\frac{c\bar{c}}{d\bar{d} - c\bar{c}}\right| = \left|\frac{bc - ad}{d\bar{d} - c\bar{c}}\right|$.

Vậy $I_4\left(\frac{\bar{d}}{c}.\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}},\left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right|\right)$

• $z_4 \to z_5 = \frac{a}{c} + z_4$, cuối cùng là phép tịnh tiến vecto có tọa vị $\frac{a}{c}$:

$$\overrightarrow{OI_5} = \frac{a}{c} + \frac{\bar{d}}{c}.\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}} = \frac{a\left(d\bar{d}-c\bar{c}\right)+\bar{d}\left(bc-ad\right)}{c\left(d\bar{d}-c\bar{c}\right)} = \frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}}$$

tất nhiên $R_5 = R_4 = \left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right|$. Vậy $I_5\left(\frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}},\left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right|\right)$.

Ta xét các ví dụ ứng dụng bài toán 4.

Ví dụ 1: Cho phép biến đổi

$$Z = \frac{(1+2i)z+2}{3z+(2-i)} = \frac{1+2i}{3} + \frac{\frac{2}{9}-\frac{i}{3}}{z+\frac{2-i}{3}},$$

tìm ảnh của đường tròn $I_0(O,1)$. Xem H7.

• $z \to z_1 = z + \frac{d}{c}$,

biến $I_0(O,1)$ --> $I_1\left(0+\frac{2-i}{3},1\right) = I_1\left(\frac{2-i}{3},1\right)$,

tọa vị = $\frac{2-i}{3}$, R = 1.

• $z_1 \to z_3 = \frac{1}{z_1}$, gồm hợp 2 phép biến đổi: đầu tiên biến $I_1\left(\frac{d}{c},1\right)$ --> $I_2\left(\frac{2+i}{3},1\right)$ là phép đối xứng qua Ox. Sau đó biến $I_2\left(\frac{\bar{d}}{\bar{c}}=\frac{2+i}{3},1\right)$

--> $I_3\left(\frac{c\bar{d}}{d\bar{d}-c\bar{c}}=\frac{-3}{2}-\frac{3i}{4},\frac{c\bar{c}}{\left|d\bar{d}-c\bar{c}\right|}=\frac{9}{4}\right)$, qua phép NĐ (O, k = 1), thật vậy:

từ $\overrightarrow{OI'} = \frac{k}{\sigma}\overrightarrow{OI}$ (k = 1)

<==> $\overrightarrow{OI_3} = \frac{1}{\sigma}\overrightarrow{OI_2} = \frac{c\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}}.\frac{\bar{d}}{\bar{c}} = \frac{c\bar{d}}{d\bar{d}-c\bar{c}}$,

$R_3 = \frac{1}{\sigma}R_2 = \frac{1}{\sigma}.1 = \frac{c\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}}$. Phương tích của O đối với đường tròn $I_2\left(\frac{\bar{d}}{\bar{c}},1\right)$,

$\sigma = OI_2^2 - 1^2 = \frac{d}{c}\frac{\bar{d}}{\bar{c}} - 1 = \frac{d\bar{d}-c\bar{c}}{c\bar{c}}$ = -4/9 (O ở bên trong đường tròn)

• $z_3 \to z_4 = \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)z_3$, nếu là số thực, thì đây là phép vị tự, nhưng đây là trường số phức, nên đây là phép đồng dạng với hệ số đồng dạng là $\frac{bc-ad}{c^2} = \frac{2}{9} - \frac{i}{3}$: vậy

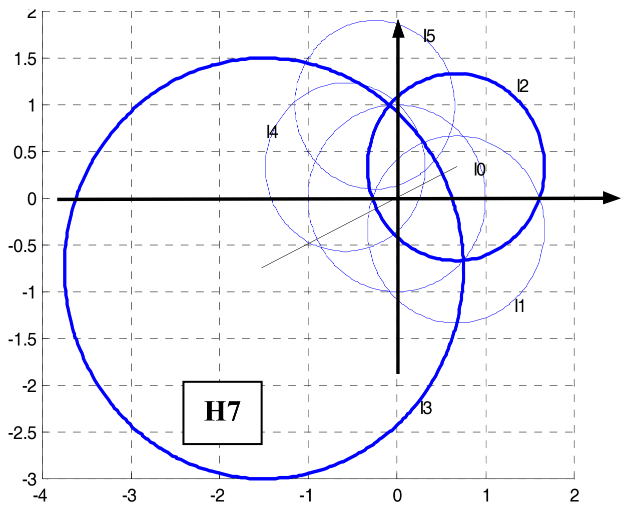
$$\overrightarrow{OI_4} = \frac{bc-ad}{c^2}\frac{c\bar{d}}{d\bar{d}-c\bar{c}} = \frac{\bar{d}}{c}.\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}} = \frac{-7}{12} + \frac{i}{3}$$

bán kính

$$R_4 = \frac{bc-ad}{c^2}\frac{c\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}} = \left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right| = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Vậy

$$I_4\left(\frac{\bar{d}}{c}.\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}} = \frac{-7}{12}+\frac{i}{3},\left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right| = \frac{\sqrt{13}}{4}\right)$$



• $z_4 \to z_5 = \frac{a}{c} + z_4$, cuối cùng là phép tịnh tiến vecto: $\frac{a}{c} = \frac{2-i}{3}$:

$$\overrightarrow{OI_5} = \frac{a}{c} + \frac{\bar{d}}{c}.\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}$$

$$= \frac{a\left(d\bar{d}-c\bar{c}\right)+\bar{d}\left(bc-ad\right)}{c\left(d\bar{d}-c\bar{c}\right)}$$

$$= \frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}}$$

$$= \frac{-1}{4} + i$$

tất nhiên $R_5 = R_4 = \left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right| = \frac{\sqrt{13}}{4}$. Vậy

$$I_5\left(\frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}} = \frac{-1}{4}+i, \left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right| = \frac{\sqrt{13}}{4}\right)$$

Tóm lại: $I_1 : \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{3}\right)^2 = 1$,

$$I_2 : \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 = 1,$$

$$I_3 : \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{4}\right)^2 = \left[\frac{9}{4}\right]^2$$

I_3 là nghich đảo của I_2 (cũng là vị tự của nhau, xem hình). I_4 là đồng dạng của I_3. I_5 là tịnh tiến của I_4.

$$I_4 : \left(x+\frac{7}{12}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 = \left[\frac{\sqrt{13}}{4}\right]^2$$

$$I_5 : \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = \left[\frac{\sqrt{13}}{4}\right]^2$$

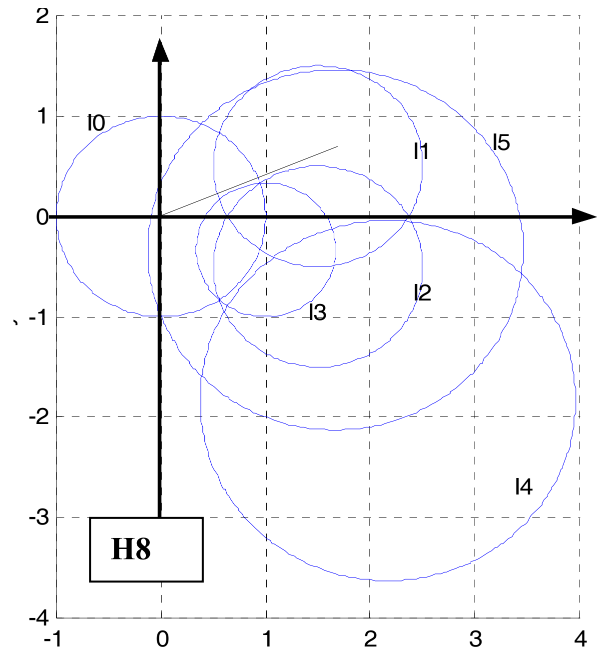
Vậy ảnh của $I_0(O,1)$ là đương tròn

$$I_5 : \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = \left[\frac{\sqrt{13}}{4}\right]^2$$

Ví dụ 2: Cho phép biến đổi vòng

$$Z = \frac{(1+2i)z+2}{(1-i)z+(2-i)},$$

tìm ảnh của đường tròn $I_0(O,1)$. Xem hình H8.



Ta biến đổi

$$Z = \frac{1+2i}{1-i} - \frac{\frac{2+5i}{(1-i)^2}}{z+\frac{2-i}{1-i}} = \frac{-1}{2} + \frac{3i}{2} - \frac{\frac{5}{2}-i}{z+\frac{3}{2}+\frac{i}{2}}$$

Ta có thể kiểm chứng các kết quả sau:

$$\frac{d}{c} = \frac{3}{2}+\frac{i}{2}, \quad \frac{bc-ad}{c^2} = \frac{3}{2}-i, \quad \frac{a}{c} = \frac{-1}{2}+\frac{3i}{2}$$

$\sigma = \frac{3}{2} > 0$ (phương tích O nằm ngoài I2)

$$I_1 : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = (1)^2$$

$$I_2 : \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2 = (1)^2$$

$$I_3 : (x-1)^2 + \left(y+\tfrac{1}{3}\right)^2 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2$$

$$I_4 : \left(x-\tfrac{13}{6}\right)^2 + \left(y+\tfrac{11}{6}\right)^2 = \tfrac{29}{9}$$

$$I_5 : \left(x-\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(y+\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{29}{9}$$

Cuối cùng I_0--> I_5. Ta thấy I_5 cắt trục tung tại tọa vị -i, ta giải phương trình, tìm z:

$$Z = \frac{(1+2i)z+2}{(1-i)z+(2-i)} = -i ==> z = \frac{-12}{13} + \frac{5i}{13} \text{ và}$$

$$|z| = 1 \Rightarrow z \in I_0 .$$

Có thể kiểm chứng:

$$Z(-i) = \frac{6}{5} + \frac{7i}{5} \in I_5 ,\ Z(i) = \frac{i}{3} \in I_5$$

$$Z(1) = \frac{5}{13} + \frac{12i}{13} \in I_5$$

Bài toán 5

(tổng quát về phép biến đổi vòng)

Ta sẽ tìm ảnh của đường tròn $I_0(t_0, r_0)$, với t_0, r_0 bất kỳ, miễn điểm miễn gốc O không nằm trên $I_0(t_0, r_0)$. Các phép biến đổi theo thứ tự sau:

1/ $I_0(t_0, r_0)$ --> $I_1(t_1= t_0 + d/c,\ r_1 = r_0)$. Phép tịnh tiến với vecto có tọa vị d/c.

2/ $I_0(t_1, r_1)$--> $I_2(t_2=\overline{t_1},\ r_2 = r_1)$. Phép đối xứng qua trục hoành.

3/ Tính phương tích của điểm O đối với vòng I_2:

$$\sigma = t_2\overline{t_2} - r_2^2 ,$$

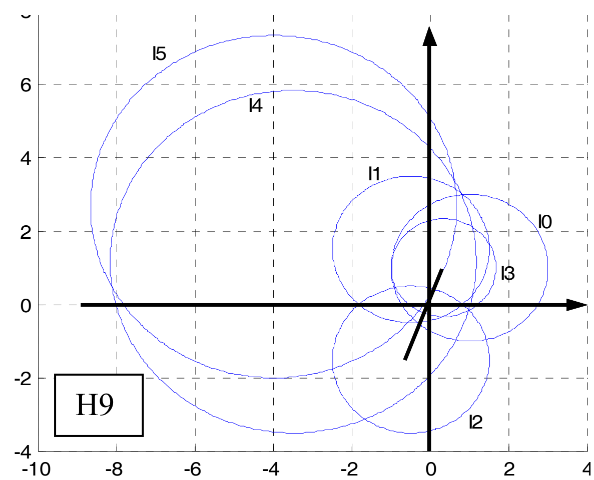
4/ $I_2(t_2, r_2)$--> $I_3(t_3=\frac{1}{\sigma}t_2,\ r_3 = \left|\frac{1}{\sigma}r_2\right|)$. Phép vị tự với hệ số vị tự $\frac{1}{\sigma}$.

5/ $I_3(t_3, r_3)$--> $I_4(t_4=\frac{bc-ad}{c^2}t_3,\ r_4 = \left|\frac{bc-ad}{c^2}r_3\right|)$. Phép đồng dạng phức với hệ số đồng dạng: $\frac{bc-ad}{c^2}$. (gồm tích 2 phép: phép quay và phép đồng dạng thực).

6/ $I_4(t_4, r_4)$--> $I_5(t_5= t_4 + \frac{a}{c},\ r_5 = r_4)$. Phép tịnh tiến với vecto có tọa vị a/c.

Ta xét hai ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho đường tròn $I_0(1+1i,\ r_0=2)$, (xem hình H9), hãy tìm ảnh của đường tròn qua phép biến đổi $Z = \frac{(1+2i)z+1+i}{(1-i)z-1+2i}$



$$\text{Ta có } Z = \frac{(1+2i)z+1+i}{(1-i)z-1+2i} = \frac{-1}{2} + \frac{3i}{2} + \frac{0+\frac{7}{2}i}{z+\frac{-3+i}{2}} .$$

Ta có thể kiểm chứng các kết quả sau:

$$\frac{bc-ad}{c^2} = 0 + \frac{7i}{2},\quad \frac{a}{c} = \frac{-1}{2} + \frac{3i}{2},$$

$$\frac{d}{c} = \frac{-3}{2} + \frac{i}{2},\quad \sigma = \frac{-3}{2}$$

$$I_0 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = (2)^2$$

$$I_1 : \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2 = (2)^2$$

$$I_2 : \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2 = (2)^2$$

$$I_3:\left(x-\tfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$I_4:\left(x+\tfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{7}{6}\right)^2=\frac{196}{9}$$

$I_5:(x+4)^2+\left(y-\tfrac{8}{3}\right)^2=\frac{196}{9}$. Cuối cùng I_0--> I_5.

trên đường tròn I_0, ảnh của $\left(1+i\sqrt{3}\right)$:

$$Z\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{382}{977}+\frac{2525i}{2324}$$

và $\left|Z\left(1+i\sqrt{3}\right)-\left(-4+\frac{8i}{3}\right)\right|=\frac{14}{3}$, chứng tỏ $Z\left(1+i\sqrt{3}\right)$ nằm trên đường tròn I_5

ảnh của $\left(1-i\sqrt{3}\right)$:

$$Z\left(1-i\sqrt{3}\right)=\frac{-1162}{1363}-\frac{764i}{981}$$

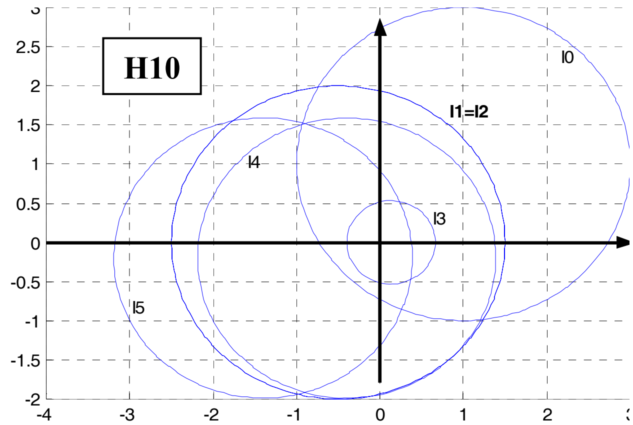
$\left|Z\left(1-i\sqrt{3}\right)-\left(-4+\frac{8i}{3}\right)\right|=\frac{14}{3}$, chứng tỏ $Z\left(1-i\sqrt{3}\right)$ nằm trên đường tròn I_5

Ví dụ 2: Cho đường tròn $I_0(1+1i,\ r_0=2)$, xem hình H10, hãy tìm ảnh của đường tròn qua phép biến đổi $Z=\dfrac{(-1+i)z-2+i}{(1-i)z-\frac{5}{2}+\frac{i}{2}}$

Ta có $Z=\dfrac{(-1+i)z-2+i}{(1-i)z-\frac{5}{2}+\frac{i}{2}}=-1+\dfrac{-3-\frac{3}{2}i}{z-\frac{3}{2}-i}$.

$\dfrac{bc-ad}{c^2}=-3-\frac{3i}{2}$, $\frac{a}{c}=-1$,

$\frac{d}{c}=\frac{-3}{2}-i$, $\sigma=\dfrac{-15}{4}$



$$I_0:(x-1)^2+(y-1)^2=4,$$

$$I_1:\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2=4$$

$$I_2:\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2=4,$$

$$I_3:\left(x-\tfrac{2}{15}\right)^2+(y-0)^2=\frac{64}{225}$$

$$I_4:\left(x+\tfrac{2}{5}\right)^2+\left(y+\tfrac{1}{5}\right)^2=\frac{16}{5},$$

$$I_5:\left(x+\tfrac{7}{5}\right)^2+\left(y+\tfrac{1}{5}\right)^2=\frac{16}{5},$$

Cuối cùng I_0--> I_5.

IV. KẾT LUẬN

Số phức trong hình học là đề tài rất ít tài liệu trong nước, cũng như nước ngoài đề cập đến, vì đây cũng chỉ là một công cụ tiếp cận khác cho các lời giải của các bài toán hình học. Nhưng nó đã thể hiện một cách kỳ diệu về sự cô đọng mà các công cụ khác tỏ ra cồng kềnh và phức tạp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Phú Vinh, Giáo trình toán cao cấp A1, A2, A3, Trường Đại học Công nghiệp thành phố Hồ Chí Minh, năm 2006.

[2] Quang Minh Phạm Đình Tần, Số tạp, Đại học Khoa học Sài Gòn, năm 1970.

[3] Nguyễn Văn Kỷ Cương, Các phép biến đổi hình học tú tài II. Sài Gòn 1970.