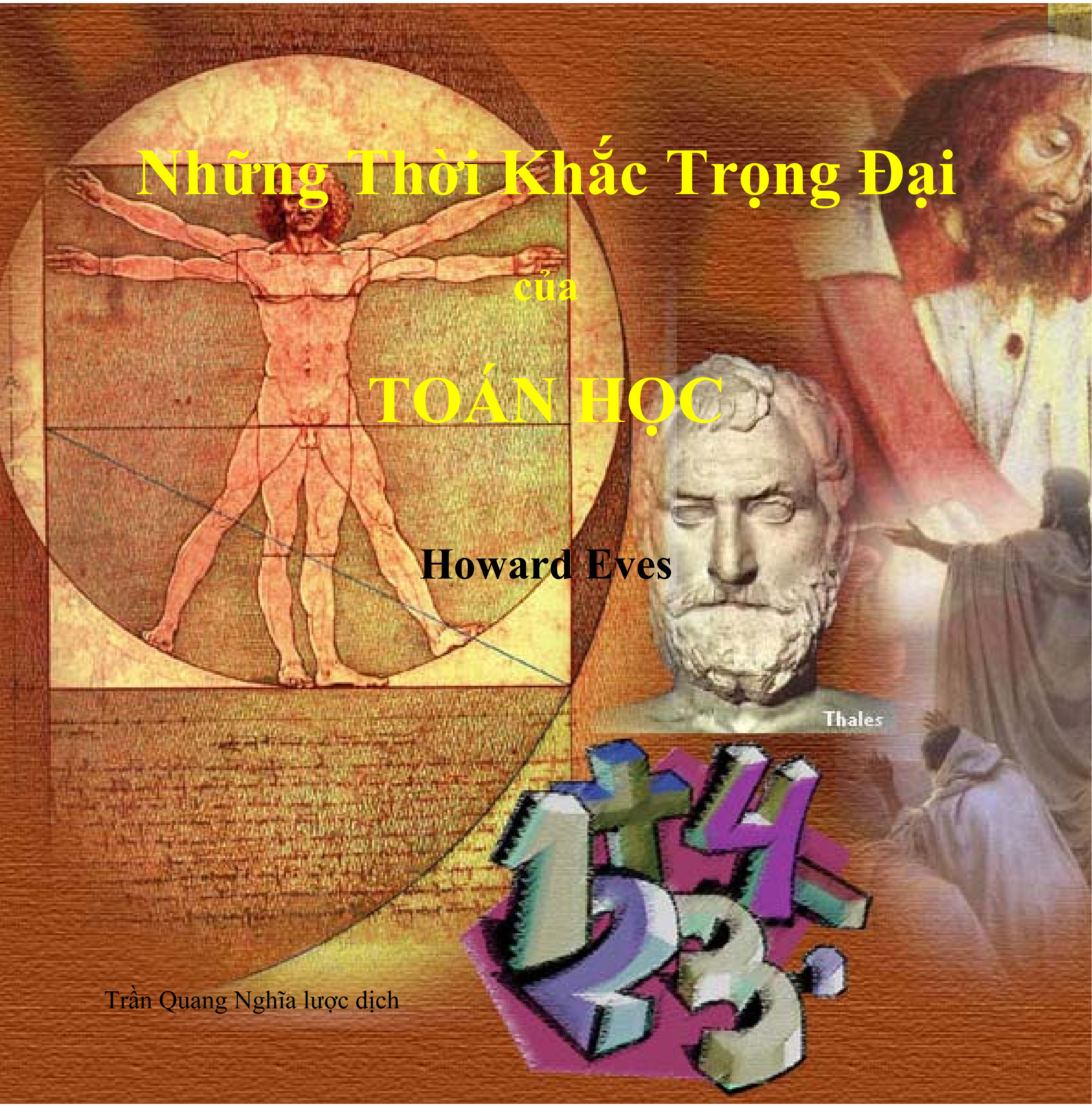


Những Thời Khắc Trọng Đại

của

TOÁN HỌC

Howard Eves

Trần Quang Nghĩa lược dịch

1. Những vết gạch và tiếng gầm gừ

Trong huyền thoại của Homere, anh hùng Ulysses rời đảo Cyclops sau khi làm mù gả khổng lồ một mắt. Gã bất hạnh này sáng sáng ngồi trước cửa hang và dùng các hòn sỏi để đếm số cừu ra khỏi hang, cứ mỗi con bước ra, gã ném một hòn sỏi sang một bên.

Rồi chiều, khi đàn cừu về hang, mỗi con bước vào, gã lại lấy bớt một hòn sỏi từ đống sỏi thu được ban sáng. Bằng cách này, nếu số sỏi ban sáng hết sạch, gã có thể tin chắc số cừu đã về hết, không có con nào đi lạc.

Truyện gã khổng lồ một mắt này chắc chắn là câu chuyện xưa nhất đề cập đến sự tương ứng một - một, là cơ bản của phép đếm. Nguyên tắc nầy có nhiều minh họa khác. Chẳng hạn, thổ dân da đỏ Bắc Mỹ muốn đếm số kẻ thù mà y đã kết liễu, y lột da đầu họ. Còn những thợ săn Phi Châu thời tiền sữ thì giữ lại một răng nanh cho mỗi con heo rừng mà họ giết được. Những thiếu nữ chưa lập gia đình của bộ lạc Masai cư ngụ trên triền núi Kilimanjaro mang vòng bằng đồng quanh cổ, số vòng bằng với số tuổi của họ. Những chủ quán rượu Anh ngày xưa dùng các vệt phấn trên bảng để ghi số lần uống của các thực khách. Những cư dân Peru thuở trước dùng các sợi thừng có thắt nút với nhiều màu sắc khác nhau để đếm dân sô trong làng.
Và lẽ dĩ nhiên, các học sinh ngày nay đếm xem còn bao nhiêu ngày nữa thì đến Noel bằmg cách đếm ngày trên tờ lịch. Và hầu như mỗi người, ít nhất đã có một lần, dùng ngón tay để đếm một số gì đó.

Vật tạo tác có ý nghĩa toán học xưa nhất tìm được là một tay cầm bằng xương, trên đó có các vết khắc sâu theo một dạng thức toán học xác định, với một mảnh thạch anh sắc bén dùng để khắc được gắn trong một khe ở đầu cán. Công cụ này được gọi là xương Ishango, được tìm thấy bởi nhà khảo cổ Jean de Heinzelin trong làng đánh cá ở Ishango, trên hồ Edward thuộc Cộng Hoà Congo, có niên đại khoảng giữa 9000 và 6500 trước Công Nguyên.

Chắc chắn thời khắc trọng đại xưa nhất của toán học xảy ra khi, cách đây vài ngàn năm, những người nguyên thủy bắt đầu học ghi lại số vật dụng nào đó bằng các vết gạch trên mặt đất hay trên đá. Rồi xả hội tiến hóa đến mức phải cần một qui trình đếm. Một bộ lạc, một thị tộc hoặc một gia đình phải phân chia lương thực giữa những người trong cộng đồng, hoặc phải ghi lại số đầu gia súc của mình. Qui trình đó là dùng những lằn gạch tạo sự tượng ứng một - một với số đơn vị của cải và chắc chắn khởi thủy của khoa học về chữ viết về sau này mới xuất hiện.

Thật hợp lí khi giả định rằng với số lượng nhỏ, người ta đếm bằng ngón tay dơ lên hay chỉa xuống. Với số lượng lớn hơn thì người ta dùng sỏi hoặc thẻ, hoặc bằng những nét gạch trên mặt đất hay đá, hay bằng vết cắt trên xương hay mặt gỗ, hay những thắt nút trên dây thừng. Đến một lúc nào đó, con người dùng những tiếng gầm gừ nhất định để chỉ một số lượng nào đó. Và về sau những chữ số được nghĩ ra để thay thế những từ chỉ số lượng.

Mặc dù quá trình phát triển kỷ năng đếm của người nguyên thủy chỉ là ức đoán, nhưng nó được củng cố bởi những báo cáo của những nhà khảo cổ khi nghiên cứu các tộc nguyên thủy còn sống ngày nay và những tạo tác đào được trong một số đia điểm trên thế giới. Đó cũng là qui trình mà trẻ con ngày nay còn dùng để bắt đầu học đếm.

Trong những thời kì khởi đầu của việc đếm bằng tiếng nói, người ta dùng những tiếng khác nhau để chỉ cùng một số lượng, chẳng hạn hai con cừu và hai người, chữ hai trong hai tình huống này lại nói bằng hai từ khác nhau. Hiện tượng này có thể tìm thấy trong ngôn ngữ, chẳng hạn trong tiếng Anh, ta có nhiều chữ khác nhau đều có nghĩa là hai : team of horses (2 ngựa trong một xe), span of mules (cặp lừa), yoke of oxen (đôi bò), brace of partridge (cặp gà gô), pair of shoes (đôi giày). Cái từ biểu thị tính trừu tượng cao nhất là số lượng 2, độc lập với bất cứ sự vật cụ thể nào đi kèm, phải rất lâu mới xuất hiện.

Mối liên hệ của những từ chỉ số đếm với các vạch ghi vẫn còn kéo dài đến ngày nay trong một số bộ lạc nguyên thủy. Chẳng hạn trong ngôn ngữ của bộ tộc Papuan ở Tân Guinea, một người nghĩa là 20, hai bàn tay nghĩa là mười, một bàn tay là năm... Bộ lạc Kamayura ở Nam Mỹ lấy từ "ngón giữa" để chỉ số 3. Họ sẽ nói : "ngón giữa ngày" để nói "ba ngày". Còn thổ dân Dene-Dinje của Nam Mỹ, có thói quen đếm bằng cách gấp ngón tay lại, sẽ nói như sau để chỉ số đếm :

"một " - " ngón út gấp lại"

"hai" - " ngón út và áp út gấp lại"

"ba" - "ngón út, áp út và ngón giữa gấp lại"

"bốn" - " bốn ngón trừ ngón cái gấp lại"

"năm" - năm ngón đều gấp lại"

" mười" - hai bàn tay đều nắm lại"

Đối với thổ dân Mandigo của Tây Phi để chỉ "chín" họ dùng từ "kononto", có nghĩa là "như thằng nhỏ trong bụng" - ý họ muốn nói chín tháng cưu mang. Giai đoạn cụ thể trong quá trình đếm cũng hiển nhiên trong ngôn ngữ Malay và Azted, trong đó các chữ "một", "hai", "ba" lần lượt là " một sỏi", "hai sỏi", "ba sỏi". Tương tự đối với dân Niuès của Nam Thái Bình Dương, ba từ chỉ các chữ số đầu tiên là "một trái", "hai trái", "ba trái". . . Có những thứ ngôn ngữ dáng điệu được dùng để chỉ những chữ số, chẳng hạn bộ tộc Papuan, muốn chỉ những con số cụ thể, họ sẽ chỉ những bộ phận khác nhau trên cơ thể.

	1: ngón út phải	12: mũi	
	2: ngón áp út phải	13: miệng	
...	.....	14: tai trái	
	5: ngón cái phải	....	...
	6: cổ tay phải		
	7: khuỷu tay phải		
	8: vai phải		
	9: tai phải		
	10: mắt phải		
	11: mắt trái	22: ngón út trái	

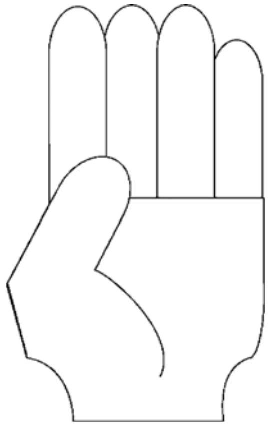
Trong các bộ tộc nguyên thủy, cũng như giữa những người sành điệu thời hiện đại, người ta thường dùng lời lẽ để đếm kết hợp với dáng điệu của bàn tay. Chẳng hạn, trong vài bộ lạc, khi nói "mười" thường kèm theo hai bàn tay vỗ vào nhau, còn "sáu" thì đi kèm với động tác bàn tay này vuốt nhanh lên bàn tay kia. Nhà nhân chủng học Karl Menninger từng nói đôi khi chỉ quan sát cách đếm bằng ngón tay của thổ dân cũng có thể biết họ thuộc sắc dân nào, chủng tộc nào.

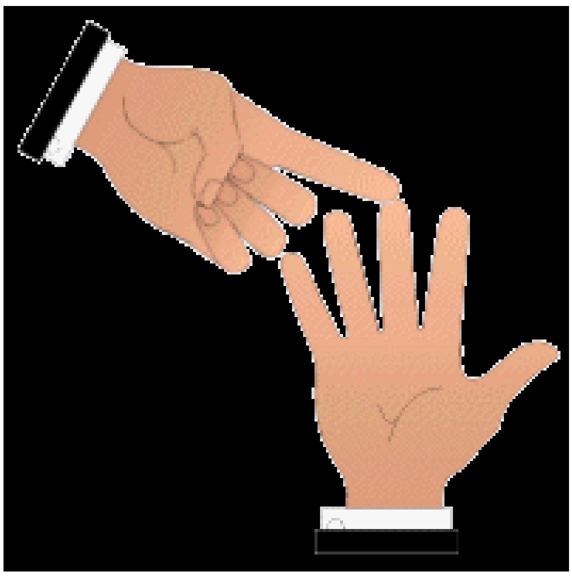
Nhà văn Anh Mason có kể một giai thoại ngồ ngộ trong thế chiến II. Một thiếu nữ Nhật đang sống ở Ấn, lúc đó đang có chiến tranh với nước Nhật. Để tránh tình huống rắc rối có thể xảy ra, bạn cô giới thiệu cô là một người Trung Hoa với một cư dân người Anh ở Ấn. Ông này nghi ngờ bèn hỏi cô hảy thử đếm đến năm bằng ngón tay của mình. Cô này, sau một chút do dự, làm theo lời ông ta. Rồi:;

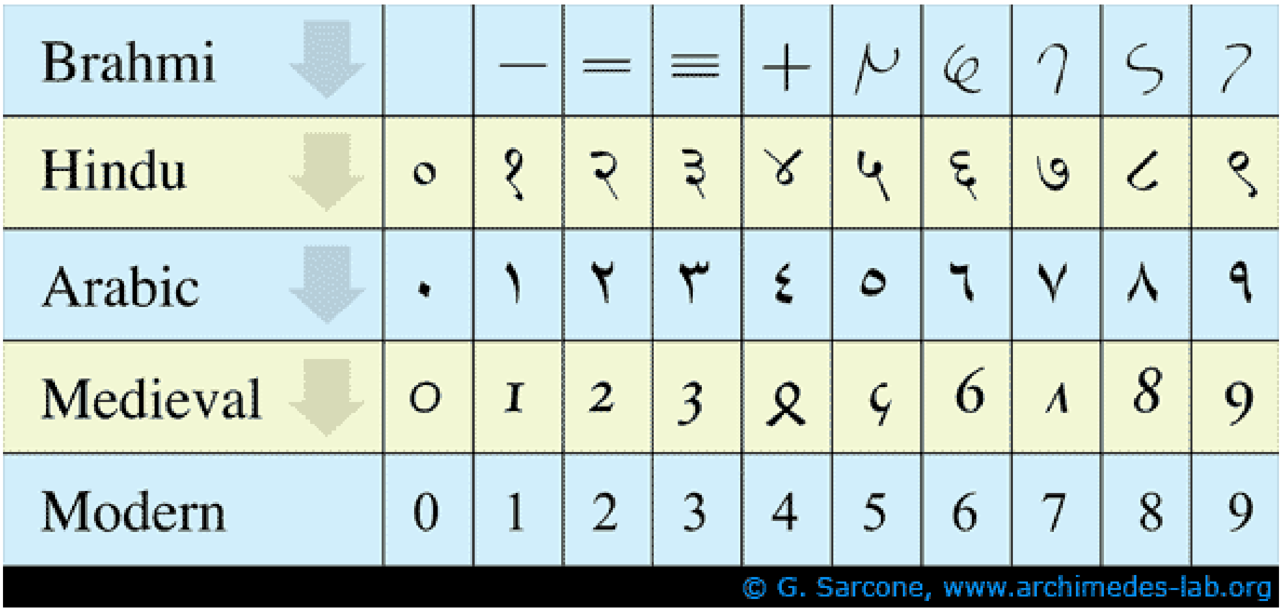
Thấy thế, ông Headley bổng cười lớn: "Đó, cô thấy không! Cô có thấy cách cô ta đếm đó không? Cô ta mở lòng bàn tay và gấp ngón tay vào từng ngón một để đếm. Cô có thấy người Trung quốc nào đếm như thế không? Không bao giờ! Người Trung quốc đếm như người Anh. Bắt đầu với bàn tay nắm lại. Như vậy cô ta là Nhật!" ông ta cười lên đắc thắng.

Khái niệm tương ứng một - một đã được coi là căn bản của phép đếm tập hợp những số hữu hạn. Trong loạt bài phần lớn in trong tạp chí toán học Mathematische bắt đầu từ năm 1874, nhà toán học Đức Georg Cantor cũng áp dụng khái niệm trên để "đếm" những số vô hạn và nhờ đó đã sáng tạo ra lý thuyết lừng danh về các số siêu hạng. Nhưng đây là chuyện của tương lai, là một thời khắc trọng đại của TOÁN học chỉ xảy ra gần đây, và sẽ được bàn đến trong một kì tới.

Chữ số La Mả







Sự iiến hóa của các chữ số

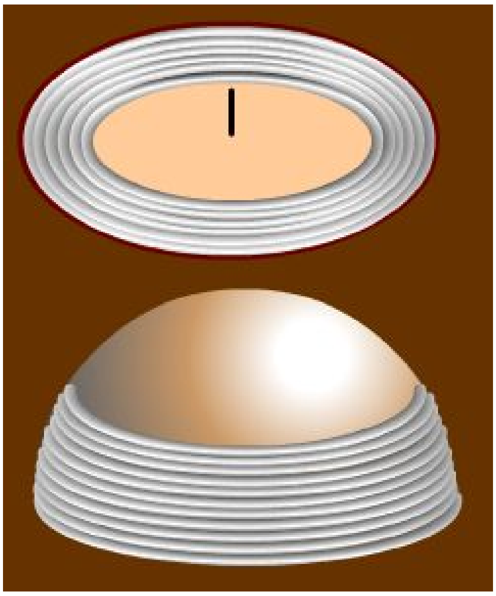
2. Kim tự tháp vĩ đại nhất của Ai cập

Những nhận định hình học đầu tiên của con người phải có từ rất lâu, xuất phát một cách vô thức từ những quan sát và nhận ra những dạng hình và so sánh kích thước cũng như hình thể của chúng. Chắc chắn một trong những khái niệm xa xưa nhất mà con người có thể cảm nhận được là khái niệm về khoảng cách, đặc biệt là phát hiện rằng đoạn thẳng là khoảng cách ngắn nhất nối hai điểm. Một khái niệm xa xưa nữa xuất hiện từ vô thức đến nhận thức là các dạng hình đa giác, như là hình tam giác, tứ giác. Thật là tự nhiên khi người ta vạch ra những đường biên bằng cách ấn định những điểm trên mặt đất rồi nối hai điểm lên tiếp bằng những bức tường thẳng hay hàng rào. Trong quá trình xây dựng các bức tường khái niệm thẳng đứng, song song, và vuông góc sẽ dần dần ló diện. Nhiều đường cong đặc biệt nổi bật trên những đường phức tạp của thiên nhiên, sẽ dần dần gây ấn tượng lên tâm trí vô thức của con người. Chẳng hạn những dĩa tròn là hình ảnh của mặt trời, mặt trăng, hay đường cầu vòng hay mặt cắt các thân cây. Rồi quỹ đạo parabol của một viên đá ném đi, đường dây xích của dây nho buông thỏng, đường xoắn ốc của dây thừng khi cuộn lại, của những tua các loài dây leo cũng gây chú ý cho các bộ óc ít quan sát nhất. Một số loài nhện giăng tơ theo những hình đa giác đều. Những dợn sóng là những đường tròn đồng tâm tỏa ra khi một hòn đá được ném xuống hồ, những đường xoắn ốc nghệ thuật trên vỏ các loài ốc biển. Nhiều quả có dạng khối cầu; thân cây thì hình trụ; những dạng hình nón xuất hiện đây đó trong tự nhiên. Những bề mặt và những khối tròn xoay, được quan sát trong tự nhiên cũng như trong sản phẩm của các thợ gốm, sẽ dần dần tác động một cách vô thức đến những trí óc hay tò mò. Con người, loài vật, và nhiều chiếc lá cũng có trục hay mặt đối xứng. Khái niệm về thể tích thành hình mỗi lần một bình chứa được đổ đầy nước ở bờ suối hay bờ sông. Khái niệm về không gian và điểm trong không gian được liên kết mỗi lần nhìn lên bầu trời đầy sao ban đêm. Danh sách liệt kê như trên có thể kéo dài vô tận.

Việc làm quen ban đầu với những khái niệm hình học theo cách trên có thể được gọi là hình học vô thức. Những người tiền sử đã quen với cách này cũng như các trẻ em ngày nay thể hiện trong các bức vẽ của chúng.

Giai đoạn thứ hai trong hình học xuất hiện khi trí tuệ con người biết rút ra từ tập hợp những liên hệ hình học cụ thể một mối liên hệ trừu tượng tổng quát mà những liên hệ cụ thể nói trên chỉ là một trường hợp cá biệt. Bằng cách này người ta đã thiết lập được một qui tắc hình học. Ví dụ, bằng cách tính diện tích các hình chữ nhật trên các giấy ô vuông bằng cách đếm các ô vuông đơn vị mà chúng chứa đựng, một học sinh tiểu học có thể rút ra qui tắc tính diện tích hình chữ nhật là lấy tích hai kích thước. Hay bằng cách đo chu vi các đĩa gỗ bằng dây, một học sinh có thể suy ra rằng chu vi đường tròn lớn hơn ba lần đường kính đường tròn một chút.

Và đây là một ví dụ cao cấp hơn, hãy xét một dĩa gỗ ở tâm có đóng một đinh sâu đến nửa và một bán cầu cùng bán kính, ở cực cũng có một chiếc định như thế. Bây giờ ta cuộn một sợi dây thừng bắt đầu từ chiếc đinh và theo hình xoắc ốc cho đến khi lấp đầy đĩa tròn và bán cầu (Trong hình chỉ vẽ một phần sợi dây). Vì sợi dây thừng lấp đầy bán cầu dài gấp hai sợi dây thừng lấp đầy đĩa tròn nên ta kết luận diện tích bán cầu bằng hai lần diện tích hình tròn cùng bán kính, do đó diện tích mặt cầu bằng bốn diện tích hình tròn

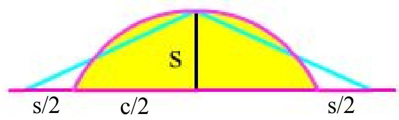


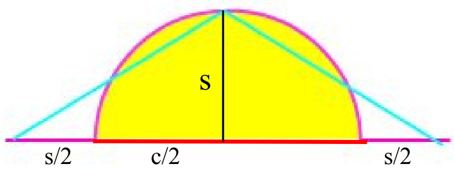
lớn của nó - một sự kiện đã được Archimedes chứng minh một cách nghiên nhặt vào thế kỉ thứ ba trước công nguyên. Với các thực nghiệm như thế, hình học đã trở thành một khoa học thực nghiệm.

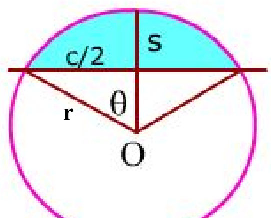
Hình học trong giai đoạn thí nghiệm này được gọi là hình học thực nghiệm. Khi lục lọi sâu vào lịch sử toán học trong quá khứ, chúng ta tìm thấy một số lượng đáng kể những kết quả của hình học thực nghiệm. Loại hình học này hình như đã xuất hiện trong vài vùng phát triển ở phương Đông Cổ Đại trong khoảng thiên niên kỉ thứ năm đến thứ ba trước công nguyên qua quá trình xây dựng, trồng trọt, thương mại cũng như những nghi lễ tôn giáo.

Thật thú vị khi biết rằng mọi kiến thức hình học còn lưu giữ được trước 600 trước công nguyên phần lớn đều là hình học thực nghiệm. Hình học hình thành bằng một số qui tắc thô sơ, một số đúng đắn, một số chỉ gần đúng, như hình học của Babylon, Ai cập và Ấn độ, cũng như Trung quốc. Để minh họa, ta hãy xét công thức tính diện tích hình viên phân của Trung quốc. Công thức này được tìm thấy trong bộ Cữu Chương Toán Pháp, có nguồn gốc từ thế kỉ thứ hai trước Công nguyên, nhưng ta biết Tần Thủy Hoàng có chính sách đốt sách năm 213 trước Công nguyên, cho nên có thể tin quyển sách này có nguồn gốc sớm hơn nữa. Trong hình dưới, gọi c là độ dài của dây cung và s là chiều cao của viên phân. Nếu từ đỉnh của viên phân ta kẻ hai cát tuyến cắt phần kéo dài của c một đoạn bằng với s/2, bằng mắt thường ta thấy hình như diện tích hình viên phân bằng diện tích tam giác cân tạo bởi đường c và hai cát tuyến. Cữu chương Toán Pháp cho rằng hai diện tích bằng nhau tức công thức diện tích hình viên phân là A = s(c + s)/2. Áp dụng công thức này cho hình viên phân đặc biệt là nửa hình tròn bán kính r: c = 2r, s = r, ta được diện tích nửa hình tròn là :

$A = r(2r + r)/2 = 3r^2/2$, tức diện tích hình tròn là $3r^2$. Như vậy Cữu Chương Toán Pháp đã cho $\pi = 3$, một giá trị gần đúng của π thường dùng trong thời cổ.







Nếu gọi r là bán kính đường tròn và θ là nửa số đo góc ở tâm chắn cung của hình viên phân, ta có :

$r = (4s^2 + c^2)/8s$ và $\sin\theta = c/2r$

và ta tính được chính xác của diện tích hình viên phân là :

$A = r^2\theta - c(r - s)/2$

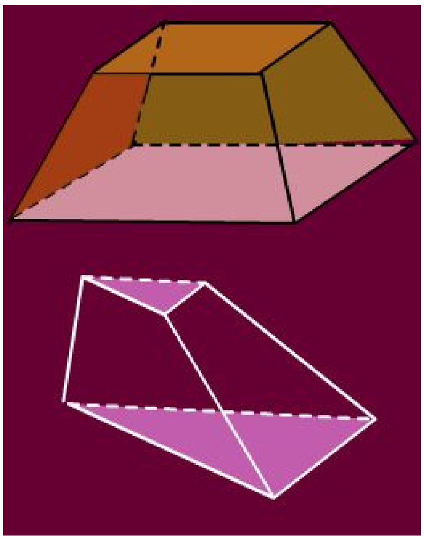
Trong bản giấy cói Rind ghi lại công trình hình học của người Ai cập có niên đại ít nhất 1650 B.C, chúng ta tìm thấy qui tắc tính diện tích hình tròn bằng diện tích hình vuông có độ dài cạnh bằng 8/9 đường kính hình tròn. Như thế công thức thực nghiệm này cho rằng giá trị của số $\pi = (4/3)^4 = 3,1604...$

Mặc dù phần lớn các thổ bản bằng đất sét khô đào được ở Mesopotamia chứng tỏ rằng người Baylon lấy $\pi = 3$, một thổ bản có niên đại từ 1900 đến 1600 B.C khai quật được ở Susa năm 1936, cách thành phố Babylon 200 dặm cho $\pi = 3^1/_8 = 3,125$.

Còn nhiều dẫn chứng khác nữa về loại hình học thực nghiệm này. Chúng ta rất ấn tượng trước số lượng đồ sộ của các qui tắc được tìm thấy bằng các phương pháp thuần túy thực nghiệm.

Nếu giữa số lượng kiến thức ấy, chúng ta phải tỉm một ví dụ nổi bật nhất để minh họa một thời khắc trọng đại của toán học, không có ví dụ nào tốt hơn là Bài toán số 14 trong bản giấy cói Moskow. Bản này có niên đại khoảng 1850 B.C trên đó ghi lại 25 bài toán cổ. Bản giấy cổ này được mua ở Ai cập năm 1893 và hiện giờ được lưu giữ trong một bảo tàng ở Moscow. Trong Bài toán 14, ta tìm thấy một thuật toán như sau: "Bạn được cho một khối chóp cụt có chiều cao 6, cạnh đáy lớn 4, cạnh đáy nhỏ 2. Bạn bình phương 4 được 16, nhân 4 cho 2 được 8, bình phương 2 được 4. Sau đó bạn cộng 3 số này là 16, 8 và 4, được 28. Rồi lấy một phần ba của 6 là 2. Cuối cùng nhân 28 với 2 được 56. Thế, số đó là 56. Bạn sẽ thấy nó rất đúng."

Bạn hiểu việc này như thế nào? Đầu tiên, chúng ta phải biết rằng, theo thói quen thời cổ khi minh họa các bài toán, trước tiên một thủ tục tổng quát được đưa ra, sau đó là những con số cụ thể cá biệt được áp dụng. Vì mọi khối chóp Ai cập thời cổ đều có dạng khối chóp tứ giác đều nên bài toán đề cập đến khối chóp cụt tứ giác đều, là phần của khối chóp cắt bởi một mặt phẳng song song với đáy. Gọi a, b lần lượt là cạnh đáy và h là chiều cao thì ở đây: $a = 4$, $b = 2$ và $h = 6$. Từ mô tả trên, thuật toán này cho rằng thể tích khối chóp cụt tứ giác đều là $V = (a^2 + ab + b^2)h/3$, một kết quả cá biệt của một công thức tổng quát hơn cho một khối chóp cụt bất kì là : $V = (B + \sqrt{BB'} + B')h/3$ trong đó B, B', h lần lượt là diện tích hai đáy và chiều cao của khối.



Hãy ngừng một lúc, nếu lí giải của chúng ta là đúng, để bày tỏ sự thán phục của chúng ta với công thức tìm được bằng thực nghiệm này. Chúng ta biết rằng người Babylon đã tìm ra công thức diện tích của hình thang (coi như tam giác "cụt") bằng tích chiều cao và nửa tổng của hai cạnh đáy. Từ đó người Babylon cho rằng thể tích khối chóp cụt cũng bằng tích chiều cao với nửa tổng diện tích hai đáy, nghĩa là :

$V = h (B_1 + B_2)/2$

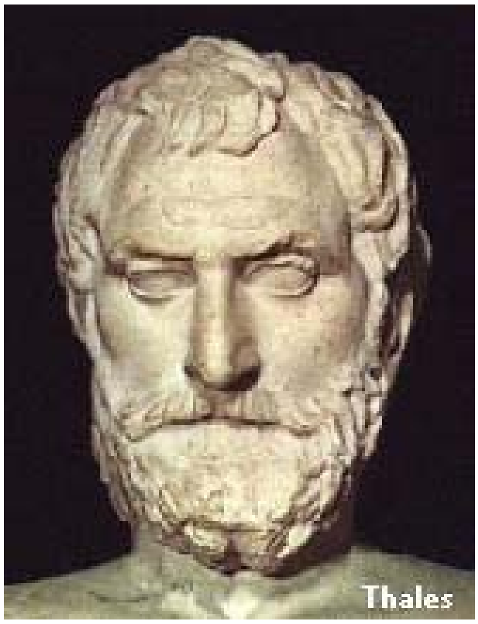
Ức đoán này cũng tự nhiên và có vẻ triển vọng nhưng thật ra lại sai.

Tác giả người Ai cập thời cổ của Bài toán 14 trong bản thảo Moscow, không giống như những người Babylon, lại đoán chính xác. Rõ ràng sự qui nạp này là một thành quả thực nghiệm đáng nể trong hình học. Đáng nể đến nổi nhà toán học Eric Temple Bell đã đặt tên cho Bài toán 14 là " kim tự tháp Ai cập vĩ đại nhất"; với Bell, phép qui nạp mà bài toán đưa ra đáng nể hơn nhiều so với công trình xây dựng các kim tự tháp khổng lồ bằng đá tảng của Ai cập cổ đại còn đứng vững đến tận ngày nay. Đây chính là **một thời khắc trọng đại của toán học.**

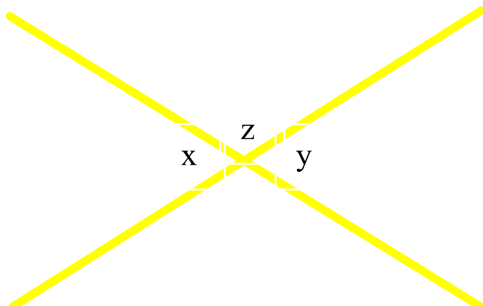
3. Từ thực nghiệm đến nghiên cứu

Khoảng năm 600 trước công nguyên toán học bước vào thời kì phát triển thứ ba. Các sử gia về toán học đều nhất trí vinh danh sự tiến bộ vượt bậc này cho người Hi Lạp trong thời đó, và người tiên phong nổi tiếng nhất là Thales thành Miletus, một trong thất hiền thời cổ đại. Hình như Thales trải những năm trẻ tuổi làm nghề buôn bán, sau đó trở nên giàu có, và nhờ thế trong những năm cuối đời, ông mới có thể dành hết thời gian cho nghiên cứu và du lịch. Ông đã từng đến Ai cập và mang về cho thành Miletus những thành tựu của người Ai cập về hình học. Ông là một thiên tài trong nhiều lãnh vực: chính khách, cố vấn, kỹ sư, doanh nhân, triết gia, nhà toán học và thiên văn học. Ông là người đầu tiên mà tên tuổi được biết đến trong lịch sử TOÁN học, và là cá nhân đầu tiên đã nêu ra những phát hiện hình học bằng phương pháp diễn dịch. Những kết quả sau đây là những đóng góp của ông:

1. Đường kính chia đôi đường tròn.
2. Hai góc đáy của một tam giác cân thì bằng nhau.
3. Những góc đối đỉnh tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau thì bằng nhau.
4. Hai tam giác có hai góc bằng nhau và một cạnh bằng nhau thì bằng nhau.
5. Góc nội tiếp trong nửa đường tròn là một góc vuông.



Thật ra chắc chắn năm kết quả trên đã được biết rất lâu trước thời Thales, và năm kết quả này đều có thể kiểm chứng bằng thực nghiệm. Vì thế giá trị của phát hiện này không phải ở nội dung của chúng mà ở chỗ Thales đã chứng thực chúng bằng lí luận chứng minh thay vì bằng trực giác và thực nghiệm. Chẳng hạn, kết quả thứ ba có thể dễ dàng kiểm chứng bằng cách dùng kéo cắt ra cặp góc đối đỉnh và đặt chúng trùng lên nhau. Tuy nhiên Thales đã chứng minh theo cách chúng ta đã học ở trung học. Trong hình dưới, ta muốn chứng minh góc x = góc y. Ta có góc x và góc y cùng bù với góc z. Mà hai đại lượng cùng bằng một đại lượng thứ ba thì bằng nhau, do đó góc x = góc y.



Kết quả trên được suy ra từ một chuỗi diễn dịch nhỏ, dựa vào một kết quả cơ bản hơn. Loại hình học này gọi là hình học chứng minh hay hình học diễn dịch, và đã được người Hi Lạp phát triển mạnh mẽ từ 600 B.C về sau. Những người Hi Lạp này đã dở bỏ những thành quả hình học, và nói chung toán học, được xây dựng bằng phương pháp thực nghiệm để thay thế bằng phương pháp nghiên cứu. Nỗ lực đầy ý thức và tập trung này chắc chắn là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC, và nếu truyền thống này là đúng, thì Thales ở thành phố Miletus là người phát động đầu tiên.

Câu hỏi là, trong số các dân tộc vào thời đó, tại sao lại là người Hi Lạp, chứ không ai khác, đã cho khẳng định là các chân lí hình học phải được chứng minh bằng lí luận chứ không phải bằng các phép đo thực nghiệm. Câu trả lời có thể là do cái gọi là sự bí ẩn Hi Lạp. Các học giả đã cố gắng cung cấp những giải thích về bí ẩn Hi Lạp, và không có lời giải thích riêng lẻ nào thỏa mãn mà phải xét tất cả các lời giải thích mới đủ làm họ hài lòng. Lời giải thích thông thường nhất là nằm ở khuynh hướng thiên về hoài nghi triết học của người Hi Lạp cổ đại. Trong triết học, người ta quan tâm đến những kết quả không tránh được suy ra từ những giả định, và phương pháp thực nghiệm chỉ là một phép đo xác suất xác minh kết quả đã biết. Chỉ có phép lí luận diễn dịch mới có thể là công cụ mà các triết gia yêu thích, và vì thế thật là tự nhiên khi người Hi Lạp chuộng phương pháp này hơn khi nghiên cứu hình học.

Một lối giải thích khác về bí ẩn Hi Lạp nằm trong lòng yêu thích cái đẹp của người Hi Lạp, như đã thể hiện hùng hồn trong nền nghệ thuật, thi ca, điêu khắc, và kiến trúc của họ. Sự trân trọng cái đẹp là một kinh nghiệm tri thức cũng như tình cảm, và từ quan điểm này, tính thứ tự, nhất quán, đầy đủ và xác định được tìm thấy trong lối lí luận diễn dịch đã làm họ hài lòng.

Mội lối giải thích khác là nằm trong vai trò của giai cấp nô lệ trong xã hội Hi Lạp thời cổ đại. Giai cấp có đặc quyền sống trên sự phục vụ của tầng lớp nô lệ, từ việc điều hành công cuộc kinh doanh, sản xuất của chủ nhân cho đến việc chăm sóc nhà cửa bằng lao động giản đơn và chân tay. Khuynh hướng bóc lột này đã vô tình tách rời lý thuyết với thực hành, khiến những người đặc quyền vô tình khinh bỉ các hoạt động thực tế và thực nghiệm tay chân, và quay ra ưa thích sự diễn dịch và trừu tượng.

Cuối cùng lời giải thích có thể đến từ những đổi thay mạnh mẽ về chính trị và kinh tế xảy ra trong thời kì đó. Thời đại Đồ Sắt đã đến, chữ viết đã được phát minh, tiền đồng đã được đúc, và những phát hiện về địa lí đã được thực hiện. Thế giới đang sẵn sàng cho một nền văn minh mới, và nền văn minh này đang hình thành trong nhóm người có tư tưởng cấp tiến và sáng tạo trong các thành phố buôn bán mọc lên tấp nập dọc bờ biển Tiểu Á và sau đó trên nội địa Hi lạp, ở Sicily và bờ biển nước Ý. Những thành phố buôn bán này phần lớn là những khu xây dựng của thương nhân Hi Lạp. Trong không khí phát triển của chủ nghĩa duy lí, con người bắt đầu hỏi tại sao cũng như thế nào. Giờ đây những tiến trình thực nghiệm đã hoàn tòan đủ cho câu hỏi thế nào, những chưa đủ để trả lời được tại sao, và những nổ lực sử dụng phương pháp diễn dịch chỉ là để xác quyết nhu cầu khẩn cấp đó.

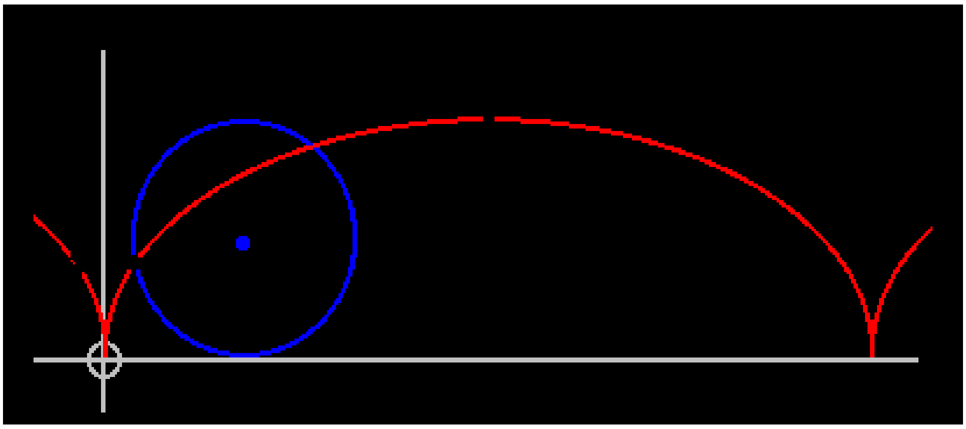
Nhưng dù bất cứ lối giải thích nào về bí ẩn Hi lạp, ta cũng phải công nhận là họ đã lái hình học đi theo một hướng hoàn toàn khác trước gồm những qui tắc thực nghiệm của tiền nhân. Hơn nữa, sự kiện là những ý tưởng diễn dịch đầu tiên xuất phát từ lãnh vực hình học chứ không phài từ đại số đã khai trương một truyền thống trong toán học còn duy trì mải đến tận thời gian gần đây.

Nhưng không vì thế ta có thể nghĩ rằng người Hi lạp tránh xa mọi phương pháp thí nghiệm hay thực nghiệm sơ khởi, bởi vì ít khi nào, nếu muốn nói là không bao giờ, có một phát hiện toán học có ý nghĩa nào mà không bắt đầu bằng những thí nghiệm sơ khởi theo cách này hay cách khác. Trước khi một phát biểu toán học nào có thể được chứng minh hoặc phản chứng minh bằng diễn dịch, đầu tiên nó phải được ức đoán, và một ức đoán không có gì khác hơn là một một dự đoán sinh ra từ trực giác, quan sát, tương tự hoá, thực nghiệm hóa hoặc một dạng thức nào đó có tính kinh nghiệm. Sự diễn dịch là một dạng thức trình bày có tính hình thức và đầy tính thuyết phục, nhưng khó lòng là một phương tiện giúp khám phá, phát minh. Khám phá là một tập hợp những cơ chế phức tạp cần dữ kiện để làm việc và dữ kiện thì thường được cung cấp qua những quan sát thực nghiệm.

Ngay cả những bước lí luận diễn dịch cũng không tự đến qua chính cơ chế diễn dịch mà có khi đến bằng sự mày mò, phép thử đúng sai, kinh nghiệm và dự đoán sắc sảo. Thật ra, kỷ năng dự đoán chính xác cũng là một trong những nhân tố chính yếu làm nên một nhà toán học có tầm cở. Điều quan trọng ở đây là người Hi lạp nhấn mạnh rằng những phát kiến toán học dự đoán hoặc tìm được qua thực nghiệm phải đi tiếp bằng phép chứng minh minh diễn dịch nghiêm nhặt mà không một lượng dù lớn lao của thực nghiệm có thể thay thế được.

Để thành công trong hình học, dù là một nhà sáng tạo hoặc đơn giản là người giải toán, ta cũng phải sẵn sàng thí nghiệm, vẽ hình và kiểm tra nhiều trường hợp, thử hướng này, thử hướng nọ. Galileo (1564 - 1642), đã cố gắng tính diện tích giới hạn bởi một đường cycloid sinh bởi một đường tròn khi lăn trên một đường thẳng. Sau những suy tư bằng vật lí qua khái niệm trọng tâm, ông ta cho rằng, và điều này sai, diện tích đó gần bằng nhưng không bằng đúng ba lần diện tích của hình tròn.

Việc chứng minh diện tích đó thật ra bằng đúng ba lần diện tích hình tròn



đã được công bố lần đầu tiên vào năm 1644 bởi học trò của ông, Torricelli (1608-1647), bằng cách dùng phương pháp tích phân.

Blaise Pascal (1623 - 1662), khi còn là một thiếu niên, đã phát hiện tổng số góc trong một tam giác bằng một góc bẹt nhờ thí nghiệm xếp hình tam giác bằng giấy.

Archimedes(287? - 212 B.C), trong chuyên luận Phương Pháp của ông, đã kể ông đã làm thế nào, bằng phương pháp cơ học, tìm ra được công thức thể tích khối cầu là 4πr3/3, trong đó r là bán kính khối cầu. Nhưng lương tri toán học của ông không cho phép ông công nhận kết quả này là một chứng minh, và sau đó ông đã tìm cách chứng minh công thức một cách nghiêm chỉnh.

Bằng cách xây dựng một khối nón tròn xoay, đổ đầy khối với cát ba lần, rồi lấy số cát ấy đổ vào khối trụ tròn xoay có cùng chiều cao và bán kính đáy với khối nón, ta có thể dự đoán rằng thể tích khối nón bằng một phần ba tích số chiều cao và diện tích đáy.

Người ta không nên đánh giá thấp phương pháp thực nghiệm và những lối tiếp cận dạng này, vì không nghi ngờ gì nữa nhiều kết quả hình học đã được phát hiện bởi phương pháp này. Lẽ dĩ nhiên, một khi một dự đoán hình học đã được thiết lập, người ta phải, theo gương Archimedes, dùng lí luận diễn dịch để chứng minh nó đúng hoặc nó sai, và như thế mới là cách giải quyết rốt ráo vấn đề. Nhiều ức đoán hình học đã được loại bỏ chỉ sau khi một hình được vẽ kỹ lưỡng hoặc sau khi xét một trường hợp đặc biệt.

Một cách màu mỡ giúp tìm ra những dự đoán hình học là sử dụng phương pháp tương tự, mặc dù phải công nhận rằng nhiều dự đoán theo cách ấy cuối cùng cũng sai. Một số lượng đáng kinh ngạc của hình học không gian cũng đã được dự kiến qua sự tương tự hoá các kết quả đã biết trong hình học phẳng.

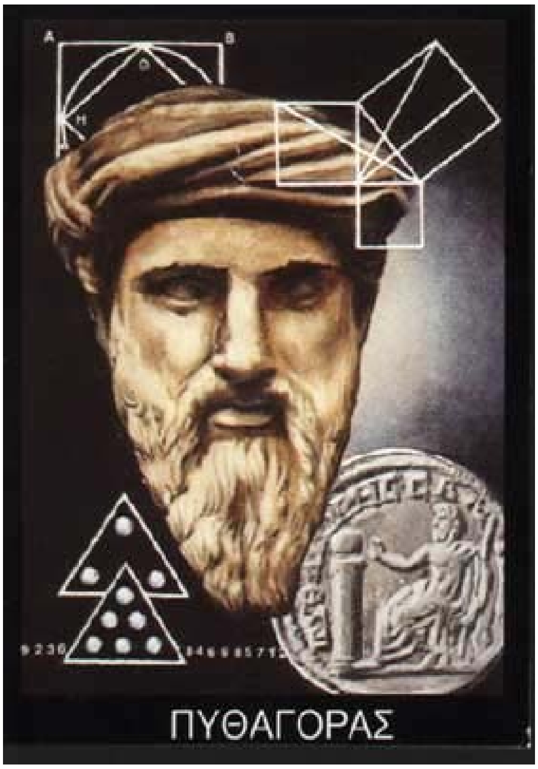
Có một nguyên tắc sư phạm dựa trên một định luật nổi tiếng trong sinh học dưới dạng "sự phát sinh cá thể tóm lược sự phát sinh loài", tức nói một cách đơn giản là : "cá thể lặp lại sự phát triển của cả nhóm". Nguyên tắc sư phạm là, ít nhất về đại thể, một sinh viên nên được dạy một môn học nào đó theo đúng trình tự mà môn học ấy đã phát triển qua thời gian. Lấy hình học làm ví dụ, chẳng hạn. Chúng ta đã biết rằng theo lịch sử, hình học phát triển theo ba giai đoạn - đầu tiên là hình học tiềm thức, sau đó hình học thực nghiệm và cuối cùng là hình học chứng minh. Nguyên tắc sư phạm tuyên bố rằng loại hình học đầu tiên nên dạy cho trẻ nhỏ là hình học tiềm thức, chắc chắn là qua những hình vẽ nghệ thuật đơn giản và việc quan sát thế giới tự nhiên. Trong giai đoạn này, các học sinh nhỏ tuổi sẽ vô tình nhận ra được nhiều khái niện cơ bản của hình học như khoảng cách, góc, tam giác, tứ giác, tính vuông góc, song song, đường thẳng, đường tròn, hình cầu, hình trụ, hình nón. . . Rồi dần dần những căn bản tiềm thức này sẽ tiến hoá thành loại hình học thực nghiệm, trong đó học sinh sẽ tìm được những dữ kiện hình học bằng các phương pháp thực nghiệm với công cụ thước kẻ, compa, thước đo độ. . . dùng kéo cắt dán các mô hình đơn giản như trong thủ công. Rồi tiếp theo, khi học sinh đã đủ chín mùi về nhận thức, hình học chứng minh mới được đưa vào, và những điều tiện lợi hay bất cập của phương pháp tiếp cận đã biết trước đây sẽ được chỉ ra.

Điểm yếu nhất trong chương trình hình học của chúng ta hiện nay hình như là ở giai đoạn hai, giai đoạn thực nghiệm hình học. Quá ít thời gian dành cho giai đoạn này. Đáng lí ra phải dành cho học sinh nhiều thời gian hơn để chúng nắm bắt được sâu sắc những khái niện hình học cơ bản. Ở đây chúng cũng nhận ra được sự quan trọng của phương pháp qui nạp sơ khởi trong toán học, đồng thời được chỉ ra những bất cập của nó nêu không được chứng minh một cách nghiêm túc bằng phương pháp diễn dịch. Điều các thầy giáo cần khi dạy loại hình học của giai đoạn này là một tập hợp những thí nghiệm hình học đơn giản sử dụng các mô hình dễ làm và rẽ tiền. Chắc chắn kết quả là sự hứng thú toán học của học sinh sẽ được khơi dậy, và đó là một đền bù xứng đáng cho công lao đầu tư của các nhà gõ đầu trẻ trong hướng đi mới mẻ và đầy sáng tạo này.

4. Định lí lớn đầu tiên

Một trong những định lí hấp dẫn, và chắc chắn là quan trọng và hữu dụng nhất của hình học sơ cấp chính là định lí Pitago, nói rằng : "Trong một tam giác vuông bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông". Nếu có định lí nào xứng đáng được phong tặng MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC thì định lí Pitago chính là ứng viên số một, vì định lí này chắc chắn là định lí lớn đầu tiên trong toán học. Nhưng khi chúng ta đi truy tìm nguồn gốc của định lí, chúng ta vấp phải một quá trình không mấy gì chắc chắn. Mặc dù giai thoại cho rằng định lí này là của Pythagoras, một nghiên cứu kỹ lưỡng các chữ hình nêm trong bản đất sét khai quật được ở Mesopotamia đã phát giác rằng chính những người Babylone cổ khoảng một ngàn năm trước thời đại Pythagoras đã biết đến định lí này. Định lí này cũng đã được người Ấn và Trung Hoa thời cổ biêt đến, trễ nhất cũng là cùng thời với Pythagoras. Tuy nhiên không có chứng minh định lí nào được đưa ra, do đó có thể Pythagoras hay một thành viên nào đó trong hội kín lừng danh này là người đầu tiên đã chứng minh được định lí.

Chúng ta hãy dừng lại một chút để nói về Pythagoras và hội kín này của ông. Pythagoras là người thứ hai được chỉ đích danh trong lịch sử TOÁN học. Nhìn kỹ qua màn sương bí ẩn của quá khứ, chúng ta biết rằng Pythagoras sinh vào khoảng 572 B.C trên đảo Aegean, Samos, không xa Miletus, quê hương của Thales. Nhỏ hơn Thales năm mươi tuổi và sống không xa ông, có thể Pythagoras đã học toán với ông. Cũng như Thales, ông chắc đã đến Ai Cập cư trú một thời gian, và sau đó có thể du lịch đến nhiều nơi khác, có thể đến tận Ấn độ. Trở về nhà sau hai năm lang bạt, ông chứng kiến Samos bị thống trị dưới ách độc tài của Polycrates và phần lớn Ionia dưới đô hộ của người Ba tư, và vì thế ông di cư đến hải cảng Crotona của Hi Lạp ở tận phía nam nước Ý. Tại đây ông thành lập trường Pythagorean nổi tiếng, bề ngoài là học viện nghiên cứu triết lí, toán học và khoa học tự nhiên, bên trong là một hội kín huynh đệ với những nghi lễ và nội quy thần bí. Dần dần quyền lực chính trị và các khuynh hướng quý tộc của hội đã trở nên lớn mạnh đến nổi các thế lực dân chủ của miền nam nước Ý đã đập phá trường học và các huynh đệ phải ly tán khắp nơi. Theo sử liệu, Pythagoras chạy đến Metapontum và mất tại đó, có thể bị kẻ thù sát hại, lúc đó ông khoảng 75 hay 80 tuổi. Các huynh đệ, mặc dù tứ tán, vẫn tiếp tục tồn tại ít nhất hai thế kỷ nữa.

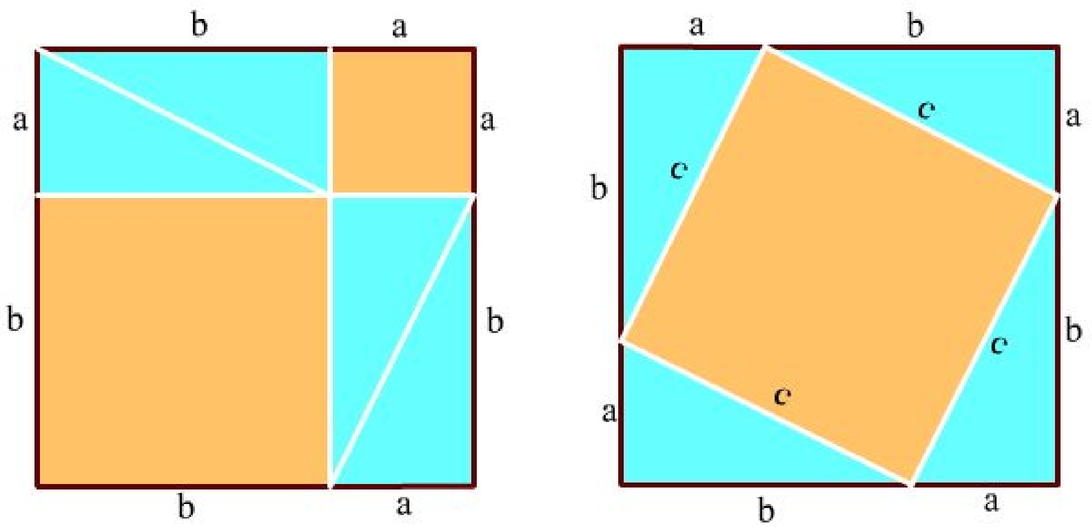


Triết lí của Pythagoras, thoang thoảng nguồn gốc Ấn, dựa trên giả định rằng những số nguyên là tác nhân tạo ra những chất lượng khác nhau của người và vật chất; nói tóm lại, số nguyên thống trị thế giới về chất cũng như về lượng. Khái niệm thăng hoa vai trò của số nguyên đã dẫn đến việc nghiên cứu nó một cách sâu xa; bởi vì biết đâu, nhờ việc vén màn bí mật tìm ra những tính chất thâm thúy của số nguyên, con người có thể, đến một mức nào đó, hướng đạo hoặc chuyển đổi vận mệnh của mình.

Và vì hình học có liên hệ với con số, nên hình học cũng được nghiên cứu một cách nghiêm túc. Do lối dạy của Pythagoras chủ yếu là truyền miệng, và theo luật kín của hội mọi khám phá toán học đều phải vinh danh người sáng lập Pythagoras, do đó không thể biết được ai chính là tác giả đích thực của định lí này.

Trở lại THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI đang bàn đến, ta tự hỏi không biết nó đã được chứng minh như thế nào. Có rất nhiều ức đoán về vấn đề này và phần lớn đều cho rằng cách chứng minh có thể dựa vào cách cắt xén như sau:

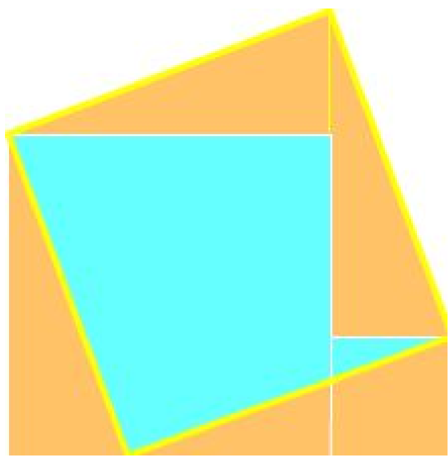
Gọi a, b, c lần lượt là hai cạnh và cạnh huyền của tam giác vuông và xét hai hình vuông có cạnh là a + b như hình dưới. Hình vuông thứ nhất được chia thành sáu miếng gồm hai hình vuông và bốn tam giác vuông đều bằng với tam giác ban đầu. Hình vuông thứ hai được chia thành năm miếng gồm bốn tam giác vuông cùng bằng với tam giác ban đầu và một hình vuông cạnh bằng cạnh huyền c. Bằng cách loại bỏ từ hai hình vuông



bốn tam giác vuông bằng nhau, ta suy ra diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh huyền thì bằng tổng diện tích hai hình vuông có cạnh là cạnh góc vuông, tức $c^2 = a^2 + b^2$.

Để chứng minh miếng chính giữa của hình thứ hai là hình vuông cạnh c, ta phải dựa vào tính chất tổng ba góc của tam giác vuông thì bằng hai góc vuông. Nhưng tính chất này đối với bất cứ tam giác nào cũng đã được cho là của Pythagoras. Vì phép chứng minh tính chất này đòi hỏi phải biết các tính chất về tính song song, những thành viên của hội Pythagoras cũng được vinh danh về kết quả hình học này.

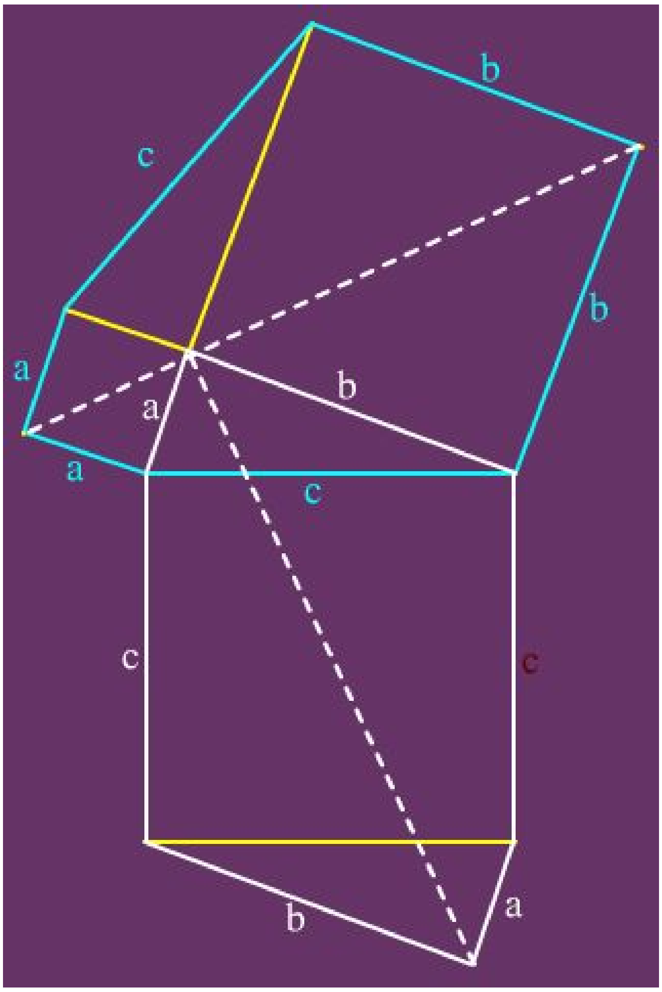
Có lẽ không có định lí hình học nào nhận được nhiều cách chứng minh hơn định lí Pythagoras. Trong quyển sách của ông, tác giả E. S. Loomis đã thu thập và phân loại hơn 370 cách chứng minh định lí nổi tiếng này.



Phép chứng minh thường dùng cách phân tích hai hình thành tổng hay hiệu các hình có diện tích bằng nhau từng đôi một. Cách mà ta đã dùng trên đây là phân tích theo hiệu.

Hình bên là một lối chứng minh theo tổng do Perigal tìm ra năm 1873 mà không biết là Qorra đã biết hơn một ngàn năm trước.

Còn cách sắp xếp như hình dưới để chứng minh định lí là của Leonardo da Vinci (1425-1519). Hai đa giác giới hạn bởi các cạnh xanh và các cạnh trắng thì có diện tích bằng nhau vì bằng 2 lần diện tích các tứ giác bằng nhau. Nếu loại khỏi hai hình này hai tam giác bằng nhau có kích thước a, b, c thì ta được các hình còn lại cũng tương đương, tức: $a^2 + b^2 = c^2$.



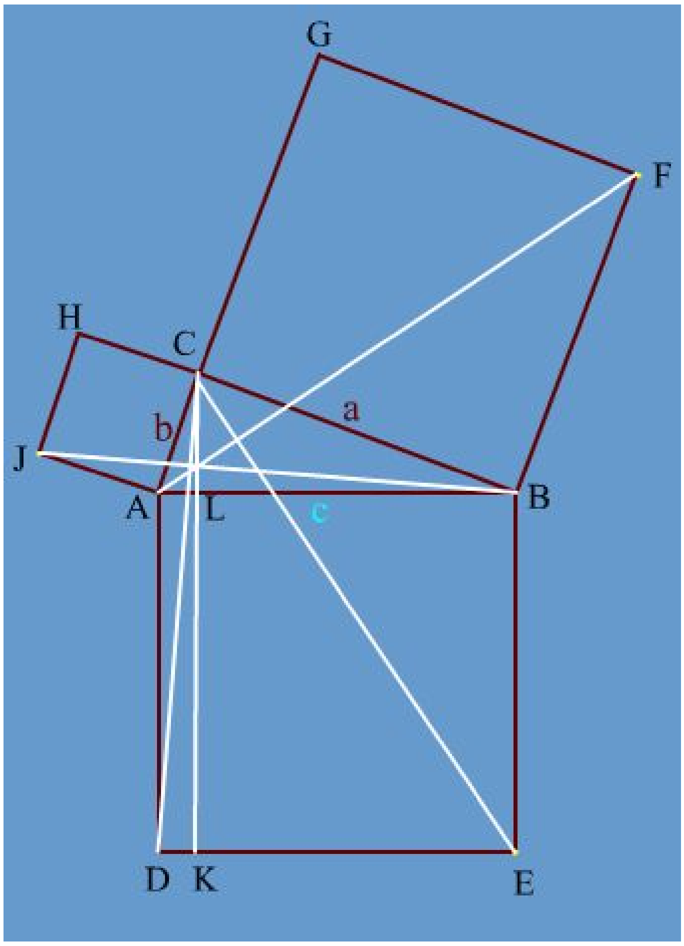
Cách chứng minh đẹp đẽ của định lí này được Euclid trình bày trong Định lí 47 Quyển I của bộ Elements dựa vào hình vẽ bên dưới. Tóm tắt như sau:

$AC^2 = 2S_{JAB} = 2S_{CAD} = S_{ADKL}$

Chứng minh tương tự: $BC^2 = S_{BEKL}$

Do đó : $AC^2 + BC^2 = S_{ADKL} + S_{BEKL}$

$= AB^2$ (đpcm)



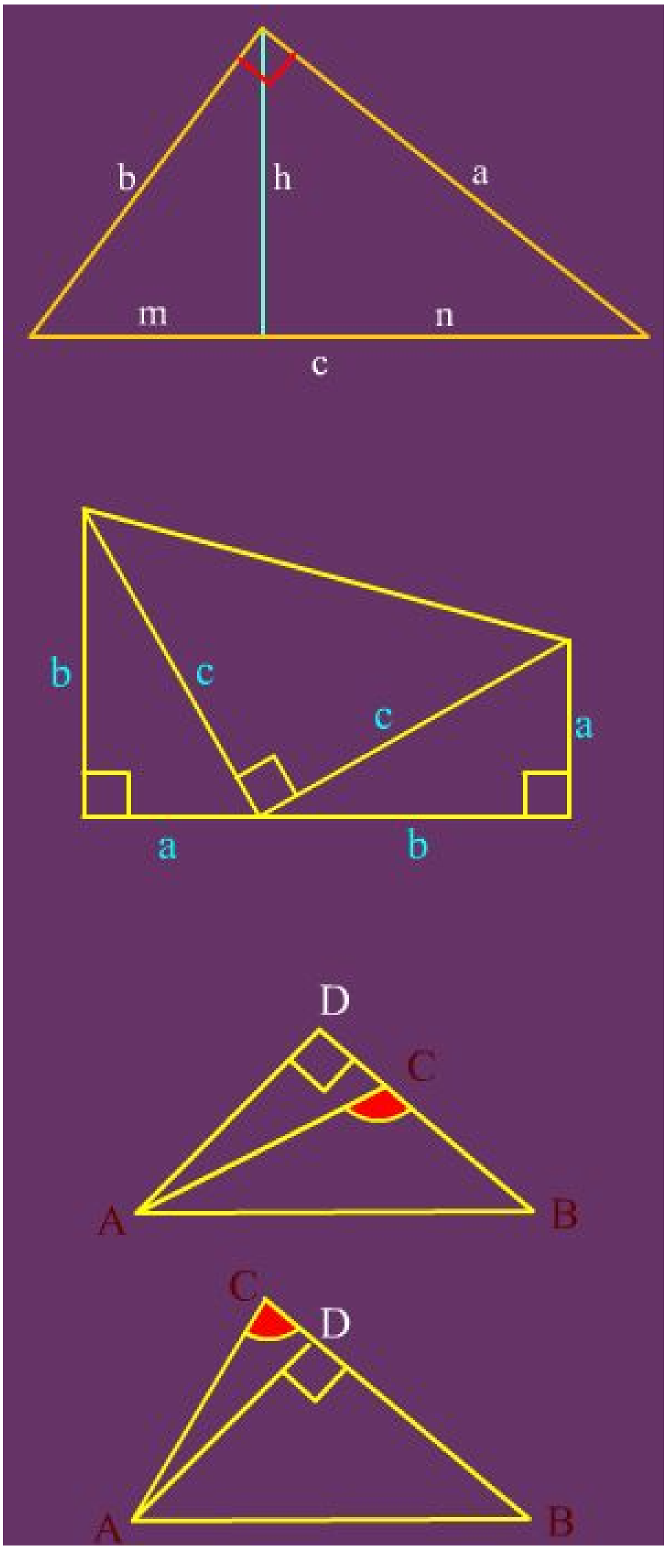
Nhà toán học Ả rập Bhaskara đã chứng minh định lí Pythagoras theo cách chúng ta đã học ở hình học sơ cấp.

Sử dụng tỉ số đồng dạng của các cặp tam giác như hình bên (trên), ta có:

c/b = b/ m và c/ a = a/ n

Suy ra : am = b^2 va cn = a^2

Cộng lại ta được: $a^2 + b^2 = c(m + n) = c^2$



Cách chứng minh này đã được nhà toán học John Wallis (1616-1703) phát hiện lại.

James Abram Garfield (1831-1881), tổng thống thứ hai mươi của Mỹ, khi còn là nghị sĩ, đã tìm được một cách chứng minh định lí này như trong hình bên (giữa). Cho diện tích hình thang bằng tổng diện tích các tam giác vuông, ta được :

$(a + b). (a + b)/2 = ab/2 + ab/2 + c^2/2$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Như nhiều định lí lớn khác, định lí Pythagoras có phần mở rộng của nó, chẳng hạn:

(1) Trong một tam giác vuông, diện tích một hình dựng lên cạnh huyền bằng tổng diện tích hai hình đồng dạng với nó dựng lần lượt trên hai cạnh góc vuông.

(2) Trong một tam giác bình phương một cạnh đối diện với góc tù (nhọn) bằng tổng bình phương hai cạnh kia cộng (trừ) với hai lần tích của một cạnh với hình chiếu của cạnh kia lên cạnh đó (2 hình bên dưới cùng)

$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2.BC. DC$ (C tù)

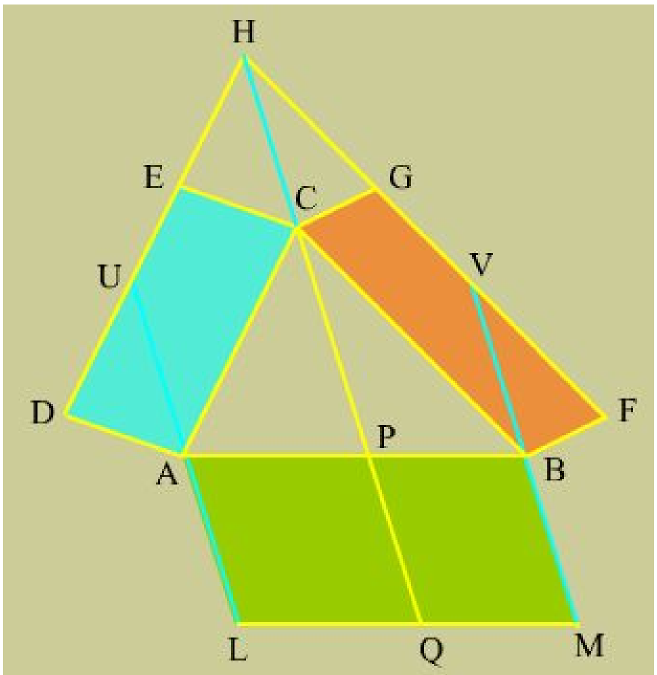
$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2.BC. DC$ (C nhọn)

Đây thật ra là định lí hàm số cosin trong tam giác ABC, trong cả hai trường hợp ta đều có:

$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2.BC.CA\cos C$

(3) Có lẽ sự mở rộng đáng chú ý nhất là của Pappus thành Alexandria (300 A.D) trong thời cổ Hi Lạp ở trang đầu của Quyển IV bộ Tuyển Tập Toán của ông, như sau:

Gọi ABC là tam giác bất kì và CADE, CBFG là các hình bình hành dựng trên cạnh CA, CB và bên ngoài tam giác. DE và FG cắt nhau tại H, kẻ AL và BM song song và bằng HC. Thế thì diện tích hình bình hành ABML bằng tổng diện tích các hình bình hành CADE và CBFG.



Chứng minh không có gì là khó khăn:

$S_{CADE} = S_{CAUH} = S_{PQLA}$

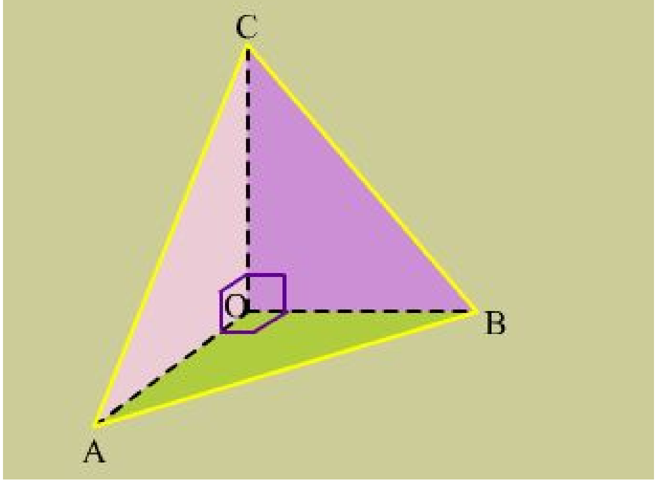
$S_{CBFG} = S_{CBVH} = S_{QMBP}$

Cộng lại, ta được đpcm.

(4) Một hướng mở rộng của định lí Pythagoras là từ mặt phẳng đến không gian. Hình tam giác vuông trong mặt phẳng xem ra tương ứng một hình chóp tam giác OABC mà ba mặt tại O đều vuông (hình dưới). Trong hình chóp như thế ta có:

$(S_{OAB})^2 + (S_{OBC})^2 + (S_{OCA})^2 = (S_{ABC})^2$

(thường được gọi dưới tên định lí Gua)



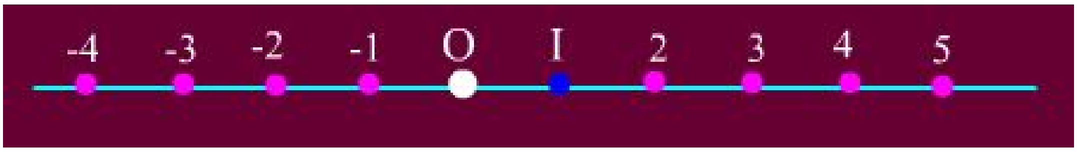
Trong không khí càng ngày ngày càng nhộn nhịp các cuộc thám hiểm không gian, các nhà khoa học càng tỏ ra bức xúc đến việc nhắn tin đến các sinh vật ngoài trái đất sự hiện diện của loài người chúng ta. Người ta nghĩ ngay đến một kiến trúc khổng lồ tiêu biểu khiến các trí khôn ngoài trái đất có thể hiểu được dễ dàng có sự hiện diện của một trí khôn khác trên hành tinh Trái Đất.. Kiến trúc được ưu ái nhất chính là mô hình của định lí Pythagoras xây dựng trên sa mạc Sahara hay đồng cỏ nước Nga.

Năm 1971, nước Nicaragua phát hành một loạt tem vinh danh "mười định lí toán học quan trọng nhất" của nhân loại. Mỗi tem mô tả một định lí với một hình vẽ đi kèm và in trên mặt sau một giải thích ngắn gọn bằng tiếng Tây Ban Nha tầm quan trọng của định lí. Một trong những con tem ấy biểu thị định lí Pythagoras "$a^2 + b^2 = c^2$". Các nhà khoa học và toán học hẳn đã rất đổi hãnh diện khi thấy những công thức này nhận được một vinh dư lớn lao như thế. Điều này không có gì phải ngạc nhiên vì chắc chắn những công thức ấy đã đóng góp cho sự phát triển của nhân loại nhiều hơn công trạng của các vị tướng hay các vị vua đã từng được chọn in trên tem.

5. Lao đến khủng hoảng đầu tiên

Những số nguyên chúng ta làm quen từ thuở niên thiếu được gọi là những số tự nhiên hoặc nguyên dương: 1, 2, 3, . . . Những số này là những khái niệm trừu tượng hình thành từ quá trình đếm tập hợp các vật thể hữu hạn. Về sau khi nhu cầu cuộc sống phát triển, đòi hỏi, ngoài việc đếm, chúng ta còn phải đo lường những đại lượng khác nhau như độ dài, trọng lượng, và thời gian. Để thỏa mãn những nhu cầu đo lường này, phân số được tạo ra, bởi vì ít khi, lấy ví dụ độ dài chẳng hạn, một kích thước nào đó đúng chính xác bằng bội số của đơn vị độ dài được chọn trước. Đối với vài đại lượng, như nhiệt độ thấp chẳng hạn, số zero và số nguyên âm và phân số âm tỏ ra tiện lợi. Hệ thống số của chúng ta dần dần được mở rộng. Nhưng, nếu chúng ta định nghĩa số hữu tỉ là thương của hai số nguyên, p/q với q khác 0, thì tập hợp các số hữu tỉ, vì chúng chứa luôn cả tập hợp các số nguyên, đã đủ dùng cho mọi mục đích đo lường thực tiễn của chúng ta.

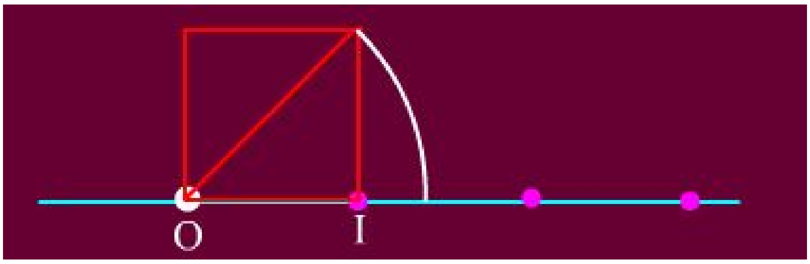
Giờ đây những số hữu tỉ có được biểu diễn hình học như sau: Lấy 2 điểm phân biệt O và I trên đường thẳng, I ở bên phải của O, và chọn độ dài OI là đơn vị độ dài. Nếu chúng ta chọn O là điểm biểu diễn số 0, I là điểm biểu diễn số 1, thế thì những số nguyên dương và âm có thể biểu diễn bằng những điểm lần lượt ở bên phải và trái của O và cách nhau bằng đơn vị độ dài.



Số hữu tỉ có mẫu là q có thể được biểu diễn bằng những điểm chia các đoạn có độ dài là đơn vị ra thành q phần bằng nhau. Như thế với mỗi số hữu tỉ, ta có một điểm biểu diễn duy nhất trên trục số. Đối với các nhà toán học thời cổ, cũng như đa số chúng ta ngay thời nay, thật là hiển nhiên khi cho rằng mọi điểm trên đường thẳng đã được tận dụng để biểu thị mọi số hữu tỉ.

Đúng là một cú sốc trí tuệ khi biết rằng còn nhiều điểm trên đường thẳng chưa dùng đến, thậm chí những điểm chưa dùng tới còn " nhiều " hơn số điểm đã được dùng để biểu diễn số hữu tỉ. Phát hiện này chắc chắn là một trong những thành tựu vĩ đại nhất của Hi Lạp Cổ Đại, và xảy ra trong khoảng thế kỉ thứ năm hoặc thứ sáu B.C trong hội kín huynh đệ Pythagoras. MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC đã điểm.

Cụ thể các hội viên Pythagoras đã phát hiện rằng không có số hữu tỉ nào tương ứng với P trên trục số mà OP bằng độ dài đường chéo của hình vuông cạnh bằng đơn vị. Về sau, nhiều điểm trên trục số được tìm ra, cũng không tương ứng với số hữu tỉ nào. Những số mới phải được tạo ra để tương ứng với những điểm như thế, và vì chúng không phải là số hữu tỉ nên được gọi là những số vô tỉ.



Theo Pythagoras, độ dài đường chéo hình vuông cạnh đơn vị là $\sqrt{2}$, do đó để chứng minh điểm P nói trên không phải là số hữu tỉ, tức là chứng minh nó là số vô tỉ. Để chứng minh, trước hết nhận xét rằng với số nguyên dương s, s^2 là chẵn khi và chỉ khi s chẵn. Bây giờ giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ tức $\sqrt{2}$ = p/q trong đó p, và q là nguyên tố cùng nhau (tức không có ước số chung khác1)

Thế thì: $p = q\sqrt{2} \iff p^2 = 2q^2$ (*)

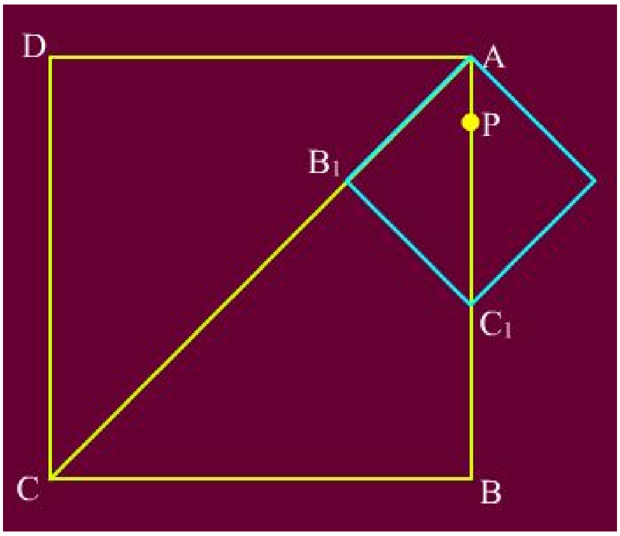
Như vậy p^2 là số nguyên chẵn, suy ra p là số chẵn. Tức p = 2r, và (*) thành:

$$4r^2 = 2q^2 \iff 2r^2 = q^2$$

Từ đó q^2 là số chẵn, và do đó q cũng là số chẵn. Nhưng điều này là vô lí vì như thế p và q không nguyên tố cùng nhau như đã giả sử. Vậy $\sqrt{2}$ không thể là số hữu tỉ, tức là số vô tỉ.

Cách chứng minh này đã được Aristotle (384-322 B.C.) công bố. Theo Plato (427-347 B.C.), sau khi số $\sqrt{2}$ đã được chứng minh là số vô tỉ, Theodorus (425 B.C.) đã chứng tỏ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}$ cũng là số vô tỉ.

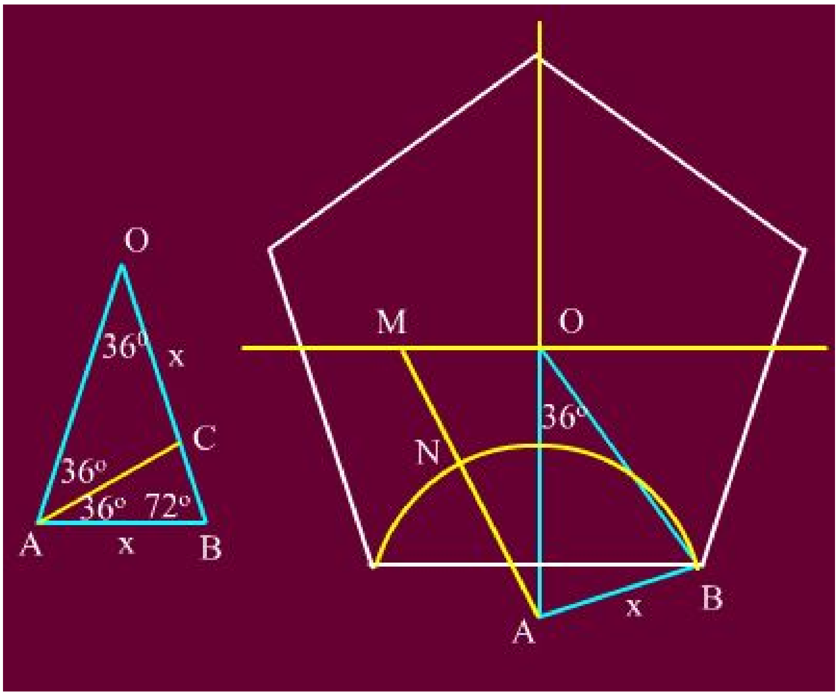
Sự phát hiện số vô tỉ đã khuấy động một niềm tin dựa vào trực giác của Hi Lạp Cổ. Cho hai đoạn, tư duy thông thường mách bảo rằng phải có một đoạn thứ ba, có thể rất, rất nhỏ, dùng làm đơn vị sao cho cả hai độ dài cho trước đều bằng một số nguyên lần đơn vị ấy. Ngay cả bản thân chúng ta, nếu không được dạy trước, cũng đã nghĩ như vậy. Hãy lấy hai đoạn có độ dài s và d lần lượt là độ dài cạnh và đường chéo hình vuông. Bây giờ nếu tồn tại một đoạn thứ ba t có thể dùng để đo s và d theo các số đo nguyên, thế thì : s = qt và d = pt, trong đó p, q là các số nguyên dương. Nhưng d = $s\sqrt{2}$, suy ra : $pt = qt\sqrt{2}$. Do đó $p = q\sqrt{2}$ hay $\sqrt{2}$ = p/q, một số hữu tỉ. Như thế là vô lí, do đó, trái với trực giác thông thường, tồn tại những đoạn thẳng vô ước, đó là những đoạn thẳng không có đơn vị đo lường chung.



Ta trình bày cách chứng minh khác, bằng hình học, là $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, bằng cách chỉ ra rằng cạnh và đường chéo một hình vuông là những đoạn vô ước. Giả sử chúng hữu ước, thế thì tồn tại đoạn AP (xem hình) sao cho cạnh AB và đường chéo AC đều hữu ước đối với AP, tức độ dài AB và AC là bội số của độ dài AP. Trên AC lấy điểm B_1 sao cho CB_1 = AB và vẽ B_1C_1 vuông góc với CA. Dễ dàng chứng minh rằng $C_1B = C_1B_1 = AB$=. Thế thì $AC_1 = AB - AB_1$ và AB_1 đều hữu ước với AP. Nhưng AC_1 và AB_1 là cạnh và đường chéo một hình vuông có kích thước nhỏ hơn phân nửa của hình vuông ban đầu. Lập lại tiến trình này nhiều lần liên tiếp ta cuối cùng được một hình vuông có đường chéo AC_n và cạnh AB_n hữu ước với AP mà AC_n < AP. Điều này vô lí và định lí được chứng minh.

Chú ý là lối chứng minh $\sqrt{2}$ không là số hữu tỉ gọi là lối phép phản chứng . Nhà toán học Anh G. H. Hardy (1877-1947) đã ví lối chứng minh này như là thế "cờ thí" trong nghệ thuật đánh cờ, trong đó cờ thủ hi sinh một quân cờ để được một thế áp đảo đối với đối phương.

Thời cổ người Hi Lạp còn chạm trán với số vô tỉ khi tìm cách dựng một ngũ giác đều . Trước đây họ đã dựng được tam giác đều, tứ giác đều và sau đó dựng lục giác đều không mấy khó khăn. Nhưng dựng ngũ giác đều là một việc khác. Muốn dựng được, ta phải dựng được một góc bằng 36^o hay 72^o là góc ở tâm trương cạnh của ngũ giác đều nội tiếp trong đường tròn.



Nếu xét tam giác cân OAB có góc đáy là 72^o thì góc đỉnh sẽ là 36^o. Gọi AC là phân giác góc A, ta có: OC = AC = AB và hai tam giác OAB và ABC đồng dạng. Lấy OA = 1 và đặt AB = x, ta có:

AB/BC = OA/AB (*)

$\Leftrightarrow x/(1 - x) = 1/x$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Cách dựng độ dài này là điều dễ dàng, như được chỉ ra trong hình trên với OA = 1, OM = 1/2 thì AM = $\sqrt{5}/2$ và : AB = AN = AM - MN = $(\sqrt{5} - 1)/2 = x$. Suy ra dễ dàng các bước dựng tiếp theo của ngũ giác đều.

(*) có thể viết lại là CO/CB = OB/CO: điểm C như thế được gọi là điểm chia đoạn OB theo tỉ lệ vàng và độ dài $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ hay số nghịch đảo của nó là $(\sqrt{5} + 1)/2 = 1{,}618\ldots$ được gọi là tỉ số vàng, và tỉ số này hình như xuất hiện mọi nơi trong tự nhiên.

Chúng ta sẽ bàn đến sự xuất hiện của tỉ số này trong tự nhiên trong bài 15. Ở đây ta chỉ nhận xét một khuynh hướng tâm lí cho thấy rằng phần đông chúng ta đều nhìn hình chữ nhật mà chiều dài và chiều rộng có tỉ lệ vàng là hình chữ nhật bắt mắt nhất. Hình chữ nhật này được gọi là hình chữ nhật vàng. Tỉ lệ vàng và hình chữ nhật vàng đã được kiến trúc và đồ gốm Hi Lạp ưa chuộng, cũng như trong điêu khắc, hội họa, thiết kế nội thất . . .

Sự khác biết nền tảng giữa số hữu tỉ và vô tỉ được biểu hiện sinh động dưới dạng thập phân của chúng. Ta chứng minh được dễ dàng mọi số hữu tỉ đều được biểu diễn bằng khai triển thập phân hoặc hữu hạn như 7/4 = 1,75 hoặc bằng một khai triển vô hạn trong đó có chứa một nhóm chữ số lặp lại tuần hoàn, như 47/22 = 2,1363636 . . . Nhóm chữ số lặp lại tuần hoàn vô hạn là 36, và số đó được kí hiệu: $2,1\overline{36}$. Ngược lại mọi khai triển có tính chất trên chính là một số hữu tỉ. Như vậy một số có khai triển thập phân vô hạn không tuần hoàn là một số vô tỉ, như số: 0,101001000100001. . . (các chữ số 0 tăng dần lên theo sau là chữ số 1 hay 0,123456789101112 . . . (các chữ số là những số nguyên dương liên tiếp) là những số vô tỉ.

Ta có thể tìm được số hữu tỉ mà khai triển của nó là một số thập phân vô hạn tuần hoàn cho trước bằng một thuật toán đơn giản của cấp 2. Ví dụ với khai triển 3,4251251251 . . . là số hữu tỉ 3,4 + 0,0251251251 . . . Đặt x = 0,0251251 . . .

Suy ra: 10000x = 251,251251 . . . hay 1000x = 251 + 10x hay 9990 x = 251

<=> x = 251/9990

Do đó: 3,4251251251 . . . = 3, 4 + 251/9990 = 34217/9990

Trong năm 1967, những nhà toán học Anh, dùng máy tính, đã tìm được khai triển thập phân của $\sqrt{2}$ đến 100.000 chữ số. Trong 1971, Jacques Dutka của Đại học Columbia, sau 47,5 giờ tính bằng máy, đã tìm đến 1.000.082 chữ số khai triển, chứa đến 200 trang giấy in, mỗi trang chứa đến 5000 chữ số. Ngày nay công việc buồn tẻ này thường được xem là bước chạy thử cho nóng máy mỗi lần một máy tính cực mạnh mới ra lò, và số các chữ số thập phân đã đến cả trăm triệu là điều bình thường.

Bạn có thể kết thúc bài này bằng cách chứng minh các tính chất sau:

(1) Giữa 2 số hữu tỉ phân biệt có vô số số hữu tỉ.

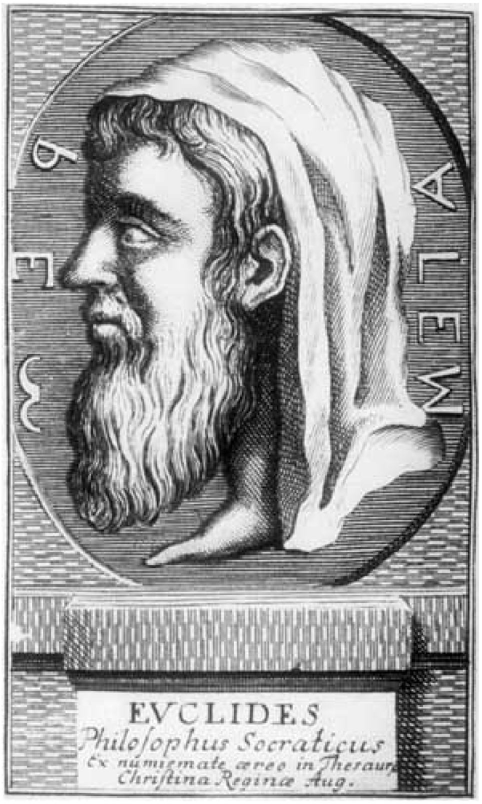
(2) Giữa 2 số hữu tỉ phân biệt có vô số số vô tỉ.

(3) Giữa 2 số vô tỉ phân biệt có vô số số hữu tỉ.

(4) Giữa 2 số vô tỉ phân biệt có vô số số vô tỉ.

8. Kinh Thánh của Toán Học

Sau khi Đại Đế Alexander băng hà năm 323 B.C, toàn bộ đế quốc Macedonia được phân thành ba phần, và phần đất chứa Ai cập đặt dưới quyền cai trị của vị tướng tài năng của Alexander là Ptolemy Soter, không lâu sau đã lên ngôi vua của miền đất này. Ptolemy chọn Alexandria, chỉ cách cửa sông Nile một vài dặm, làm thủ đô, và vào khoảng năm 300 B.C. , ông mở cửa trường Đại Học Alexandria lừng danh. Trong số những học giả uyên bác có mặt trong ban giảng huấn là nhà toán học Euclid, chắc chắn cũng đã từng theo học tại Học Viện Platonic ở Athens.



Một trong những nhiệm vụ quan trọng về TOÁN học của Euclid khi dạy tại Alexandria là biên soạn bộ Elements (*Các Yếu Tố*) lừng danh thiên cổ của ông. Bộ sách đáng nể và đồ sộ này gồm 13 quyển, là bộ sách toán được viết theo phương pháp tiên đề đầu tiên truyền tụng đến chúng ta. Nó được xem là một dấu ấn lớn lao trong lịch sử phát triển toán học, mà tầm ảnh hưởng của nó đến các công trình khác về sau không thể nói hết được .

Các Yếu Tố của Euclid chắc chắn là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC. Bộ sách tổng hợp quá đầy đủ các công trình trước đây đến nổi không ai còn nhớ đến những thành quả có trước và chúng ta chỉ biết đến chúng qua các lời chú giải của các tác giả về sau này. Từ khi bộ sách ra đời, *Các Yếu Tố* đã nhận được bao nhiêu là lời tán tụng. Trừ Thánh Kinh, không có trước tác nào đã được sử dụng, học tập, hoặc biên tập lại rộng rãi đến như vậy trong hơn hai ngàn năm thống trị mọi giáo trình giảng dạy hình học. Hơn 1000 lần xuất bản từ khi nó xuất hiện lần đầu năm 1482. Nội dung và phương pháp của nó đã tạo một cú hích lớn lao cho sự phát triển nội dung cũng như nên tảng luận lí của toán học. Proclus, một nhà toán học sống vào thế kỷ thứ năm, đã làm sáng tỏ cho chúng ta ý nghĩa của từ Yếu Tố. *Các Yếu Tố* trong nghiên cứu chứng minh là các định lí nền tảng được dùng nhiều trong môn học; giúp chứng minh hầu hết các định lí khác. Chức năng của chúng có thể so sánh với bảng chữ cái đối với ngôn ngữ; thật ra chữ cái trong tiếng Hi Lạp cũng được gọi là *Các Yếu Tố*. Việc chọn ra định lí nào là yếu tố của môn học đòi hỏi một sự phán xét khéo léo tính tế của tác giả.

Không phải vì đã có những nổ lực trước Euclid mà ta xem thường công trình rực rỡ của ông. Theo Proclus, *Các Yếu Tố* đã được biên soạn đầu tiên bởi Hippocrates ở thành Cios vào giữa thế kỷ thứ 5 B.C. Sau đó đến Leon, giữa thời Plato và Eudoxus, đóng góp thêm nhiều định lí hữu dụng so với Hippocrates. Bộ sách giáo khoa dùng tại Học Viện Platonic được tổng hợp bởi Theudias, được coi như là một tuyển tập đáng nể của *Các Yếu Tố*. Công trình của Theudias hiển nhiên là tiên phong so với trước tác của Euclid, chắc chắn ông đã tham khảo bộ sách này vì người ta cho rằng ông đã từng học tại Học Viện Platonic một thời gian. Euclid cũng quen thuộc với công trình của Theudias và Eudoxus, nhưng không vì thế mà tác phẩm của ông bớt đi giá trị. Mặc dù tác phẩm này là tập hợp những biên soạn của những người đi trước, nhưng giá trị chủ yếu của bộ sách nằm ở sự việc tuyển chọn khéo léo và sắp xếp hợp lí và sắc sảo các kiến thức theo một chuỗi logic của sự phát triển từ một nhóm nhỏ các tiên đề ban đầu. Cũng không vì dưới ánh sáng phê phán của các bộ óc toán học hiện đại cho thấy bộ sách đã bộc lộ những khiếm điểm ở cấu trúc hệ thống, mà giá trị của bộ sách bị giảm sút đi. Không thể nào, vào một thời xa xưa và phôi thai của khoa học, có thể tạo ra một hệ thồng toán học hoàn hảo, không tì vết.

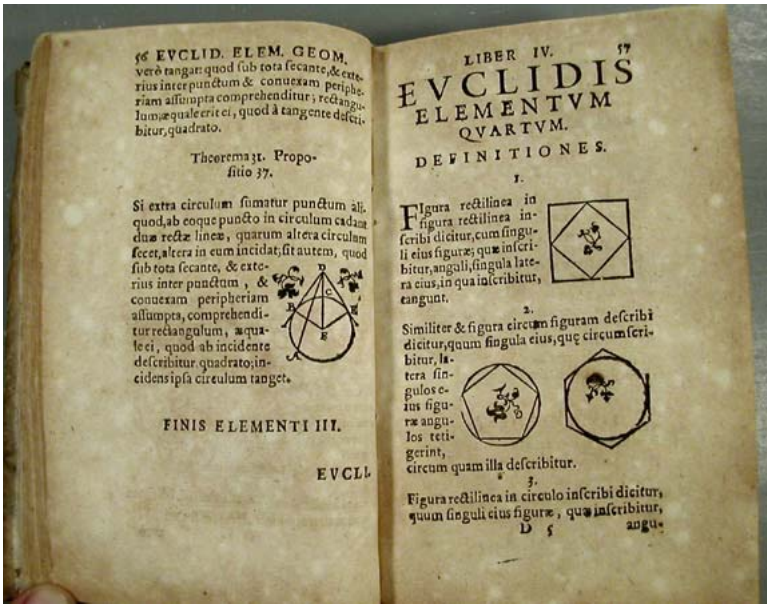
Phế tích của đại học Alexandria

Học tại Đại Học Alexandria thật là tuyệt

Hiện nay nguyên bản của bộ Elements ở thời ông không còn tồn tại. Tất cả những ấn phẩm hiện đại của *Các Yếu Tố* đều dựa vào bộ hiệu đính của Theon ở Alexandria, một nhả phê bình Hi Lạp sống khoảng 700 năm sau thời đại của Euclid. Chỉ khi bắt đầu thế kỷ thứ 19 người ta mới phát hiện một bản sao cổ hơn. Năm 1808, khi Napoleon ra lệnh chuyển tất cả những bản thảo quí từ các thư viện Ý về Pháp, F. Peyrard tìm thấy, trong thư viện toà thánh Vatican, một bản sao từ thế kỷ thứ 10 của tác phẩm *Các Yếu Tố* của Euclid.

Nghiên cứu bản này cho thấy chỉ có sự khác biệt nho nhỏ so với bộ sách hiệu đính của Theon. Bản dịch ra Latin *Các Yếu Tố* không phải từ tiếng Hi Lạp mà từ tiếng Ả Rập. Vào thế kỉ thứ tám một số bản thảo vùng Byzantine Hi Lạp được Ả rập chuyển ngữ; và vào năm 1120, Adelard, một học giả Anh đã dịch ra Latin từ bản thảo này. Những bản dịch khác từ Ả rập ra Latin là do Gherardo (1114-1187), và 150 năm sau Adelard, là bản dịch của Johannes Campanus. Ấn phẩm in đầu tiên của bộ sách là vào năm 1482 in tại Venise dựa trên bản dịch của Campanus. Bộ sách quí hiếm này được đóng thật đẹp và là quyển sách TOÁN đầu tiên được in ra. Bản dịch ra Latin từ tiếng Hi Lạp do Commandino thực hiện năm 1572. Bản này là căn bản cho các bản dịch về sau, bao gồm tác phẩm quan trọng của Simson, từ đó nhiều tác phẩm khác đã tham khảo.

Nhà toán học Pháp, Legendre (1752-1833), nổi tiếng trong lịch sử chủ yếu nhờ công trình về lý thuyết số, hàm elliptic, phương pháp bình phương cực tiểu, và tích phân, cũng quan tâm đến vấn đề sư phạm. Trong tác phẩm rất phổ thông *Các Yếu Tố Hình Học*, ông đã cải tiến tính sư phạm của bộ *Các Yếu Tố* của Euclid bằng cách sắp xếp lại và đơn giản nhiều định lí Euclid. Công trình này rất được ưa chuộng tại Mỹ và trở thành nguồn tham khảo cho các sách giáo khoa hình học tại đó. Bản dịch ra tiếng Anh của cuốn *Các Yếu Tố Hình Học* được thực hiện năm 1819 bởi John Farrar của Đại Học Harvard. Ba năm sau, một bản dịch khác được nhà văn Thomas Carlyle thực hiện. Ông đã từng là thầy giáo dạy toán trước khi trở thành nhà văn.



56 EVCLID. ELEM. GEOM.
verò tangat: quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur; rectangulum æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

Theorema 31. Propoſitio 37.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato; incidens ipſa circulum tanget.

FINIS ELEMENTI III.

EVCLI-

LIBER IV. 57

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

1.

Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli, ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

2.

Similiter & figura circum figuram deſcribi dicitur, quum ſingula eius, quę circumſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

3.

Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, quum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, angu-

D 5

Trong bản hiệu đính của Theo, bộ Elements gồm 13 quyển, và chứa tất cả 465 định lí. Trái với ấn tượng ban đầu, ngoài hình học, còn đề cập đến lý thuyết số cơ bản và đại số Hi lạp.

Quyển I bắt đầu với những định nghĩa và giải thích cần thiết, tiên đề, định đề. Mặc dù các nhà toán học ngày nay coi thuật ngữ tiên đề và đinh đề là một, một

số nhà toán học Hi lạp, trong đó có Euclid, thì phân biệt hai thuật ngữ này, như sau: tiên đề là một giả định đầu tiên hiển nhiên đối với mọi ngành nghiên cứu, trong khi định đề là một giả định đầu tiên liên hệ đến ngành đặc biệt nào đó đang xét. Những định lí của Quyển I là những định lí quen thuộc của điều kiện bằng nhau của tam giác, đường thẳng song song và các đa giác. Định lí 47 và 48, hai định lí cuối cùng của quyển, là định lí Pythagoras thuận và đảo. Điều này làm ta nhớ lại một câu chuyện của triết gia Anh, Thomas Hobbes (1588-1679). Một ngày, mở *Các Yếu Tố* của Euclid, tình cờ đọc phải định lí Pythagoras, Hobbes thốt lên: "Trời đất, điều này không thề được," và rồi tiếp tục đọc các cách chứng minh trong Quyển I, đi ngược trở lên đến các tiên đề và định đề, ông mới bắt đầu bị thuyết phục.

Quyển II, một quyển mỏng chỉ có 14 định lí, liên hệ đến các hệ thức lượng của trường phái Pythagoras. Chúng ta đã bàn đến, trong bài 4, về định lí 12 và 13 của quyển này là sự tổng quát hóa Pythagoras thành định lí hàm số cosin.

Quyển III, gồm 39 định lí, chứa những định lí quen thuộc về đường tròn, dây cung, cát tuyến, tiếp tuyến và số đo các góc nội tiếp, góc trong và ngoài mà bất cứ học sinh trung học nào cũng học qua. Quyển IV, với chỉ 16 định lí, đề cập đến các phép dựng, bằng thước và compa, các loại đa giác đều nội tiếp trong đường tròn cho trước.

Quyển V, như đã bàn đến ở bài trước, đề cập đến lý thuyết của Eudoxus về tỉ lệ. Quyển này được coi là một trong những kiệt tác của văn chương toán học. Trong bài trước, chúng ta đã từng kể đến chuyện, nhờ đọc quyển này mà nhà toán học Bolzano đã thoát khỏi cơn bệnh tật khi du lịch ở Prague. Quyển VI, một trong những quyển phong phú nhất của bộ Các Yếu Tố, áp dụng 1ý thuyết Eudoxus vào việc nghiên cứu các hình đồng dạng.

Quyển VII, VIII và IX, chứa tổng cộng 102 định lí, đề cập đến lý thuyết số cơ bản. Quyển VII bắt đầu với thuật toán mà ngày nay chúng ta đặt tên là thuật toán Euclidean, tìm ước số chung lớn nhất của hai hay nhiều số nguyên. Chúng ta cũng tìm gặp các lý thuyết trước đây của Pythagoras về tì lệ. Quyển VIII bàn về tỉ số, tỉ lệ và cấp số nhân. Quyển IX chứa nhiều định lí có ý nghĩa về lý thuyết số. Định lí 14 trong quyển này tương đương với định lí nền tảng số học như sau : Mọi số nguyên lớn hơn 1 có thể phân tích thành tích các thừa số nguyên tố và cách phân tích này là duy nhất. Trong định lí 20, ta bắt gặp cách chứng minh đẹp đẽ rằng số các số nguyên tố là vô hạn. Định lí 35 cung cấp một cách giải hình học của tổng các số hạng của một cấp số nhân, và định lí cuối cùng của quyển này, định lí 36, thiết lập một công thức cho ta những số hoàn toàn (Perfect number).

Quyển X là quyển sách khó đọc nhất, bàn về số vô tỉ đó là những độ dài vô ước với những độ dài cho trước. Ba quyển cuối cùng đề cập đến hình học không gian, gồm những kiến thức ta quen thuộc ở thời trung học, không có các công thức về hình cầu. Trong bài sau, chúng ta sẽ biết rằng các kiến thưc về hình cầu là do Archimedes phát hiện thêm về sau này.

Cũng còn có những bản thảo Hi lạp thời cổ khác, ngoài bộ Elements, được truyền lại cho hậu thế chúng ta. Chẳng hạn những công trình sâu sắc của Archimedes, tác phẩm Thiết Diện Cônic của Apollonius, Almagest của Ptolemy, Metrica của Heron, Số Học của Diophantus, Tuyển Tập Toán Học của Pappus, và còn nhiều nữa. . . Nếu chỉ muốn tìm trong số những tác phẩm ấy một ứng viên duy nhất để vinh danh thì Các Yếu Tố của Euclid là tác phẩm duy nhất xứng đáng là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC.

Chúng ta sẽ khép lại bài này bằng cách liệt kê vài tiên đề và định đề Euclid:

Tiên đề hoặc những Khái Niệm Chung

1. Những vật cùng bằng với một vật khác thì bằng nhau.
2. Nếu những vật bằng nhau cộng thêm vào hai vật bằng nhau thỉ bằng nhau.
3. Nếu những vật bằng nhau lấy ra từ hai vật bằng nhau thỉ bằng nhau.

4. Những vật mà chồng khít nhau thì bằng nhau.

5. Toàn thể thì lớn hơn thành phần.

Định đề

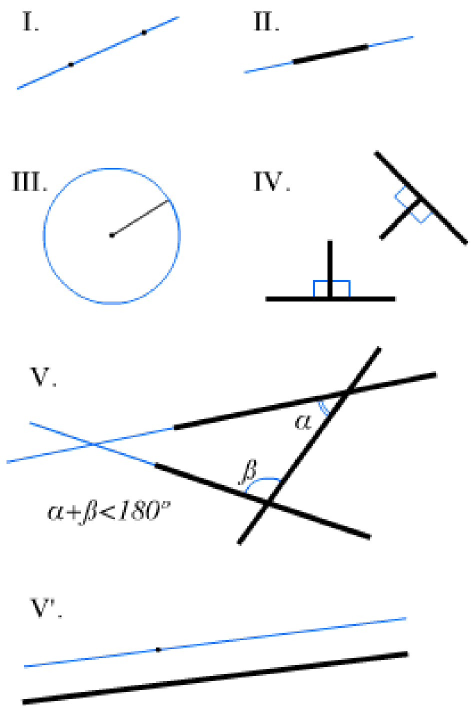
1. Qua hai điểm cho trước có thể dựn được một đường thẳng.

2. Một đường thẳng có thể kéo dài liên tục về cả hai phía.

3. Có thể dựng được một đường tròn có tâm là điểm cho và qua một điểm khác cho trước .

4. Mọi góc vuông đều bằng nhau.

5. Nếu một đường thẳng xác định với hai đường thẳng khác hai góc trong cùng phía có tổng nhỏ hơn hai góc vuông thì chúng sẽ cắt nhau tại một điểm nằm về phía hai góc ấy.



Các định đề Euclid

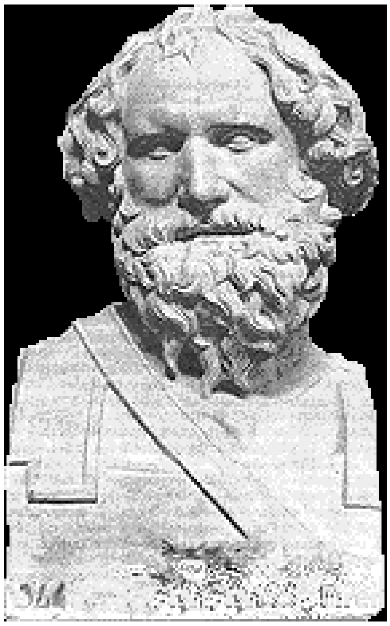
Cần nhận xét rằng cách dựng trình bày trong ba định đề đầu được giới hạn chỉ dùng compa và thước không chia đơn vị . Đó là lí do tại sao hai công cụ này thường được gọi là công cụ Euclidean, và phép dựng với hai công cụ trên mà thôi được gọi là phép dựng Euclidean. Euclid thường dùng phép dựng để chứng minh sự tồn tại của một thực thể nào đó vừa được định nghĩa. Ví dụ khi định nghĩa đường phân giác của một góc là đường qua đỉnh góc và chia góc ấy thành hai góc bằng nhau, không có gì bảo đảm là đường phân giác ấy tồn tại. Để chứng minh nó tồn tại, đơn giản nhất là chỉ ra cách dựng nó. Các định lí tồn tại trong toán học rất quan trọng, và cách dựng một thực thể là cách thỏa mãn nhất để chứng minh thực thể ấy tồn tại.

Trong thực tế tồn tại những thực thể mà phép dựng chúng vượt quá công cụ Euclidean, và những nỗ lực để tìm ra những cách dựng mà giờ đây ta biết là không thể dựng được chỉ bằng thước và compa đã cho ra đời một lượng kiến thức đáng kể của hình học.

Chúng ta cũng biết rằng định đề thứ 5 của Euclid, sau này vào thế kỉ thứ 19, đã tạo cảm hứng đưa đến một sáng tạo có tầm quan trọng cực kì về mặt phát triển toán học. Cassius J. Keyser đã cho rằng định đề này là một phát biểu tuy ngắn gọn và giản dị nhưng lại là phát biểu nổi tiếng nhất trong lịch sử khoa học.

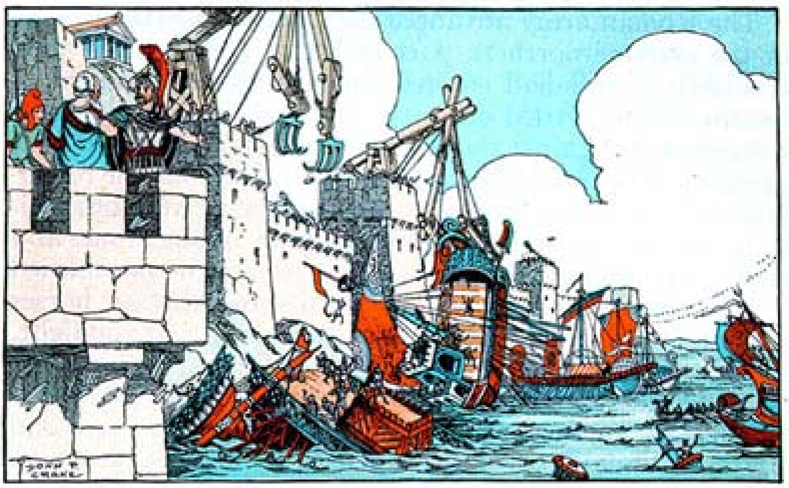
9. Nhà tư tưởng và viên tướng

Thật đáng kinh ngạc khi có nhiều thành tựu toán học có nguồn gốc từ Hi lạp cách đây hai ngàn năm. "Nơi miền đất đó có những người khổng lồ", theo như cách nói của nhà hình học Julian Lowell Coolidge của Harvard. Không còn nghi ngờ gì nữa người vĩ đại nhất trong các người khổng lồ là Archimedes của thành phố Syracuse, nhà toán học kiệt xuất. Trong bài này ta sẽ thấy, bằng những phương tiện rất hạn chế, Archimedes đã tìm ra diện tích của những tam giác cong và thể tích vài mặt tròn xoay, mở đường cho phép tính vi tích phân mà mãi nhiều năm sau mới tiến hoá và hoàn thiện qua các công trình của Kepler, Cavalieri, Fermat, Wallis, Barrow, Leibnitz, và Newton.

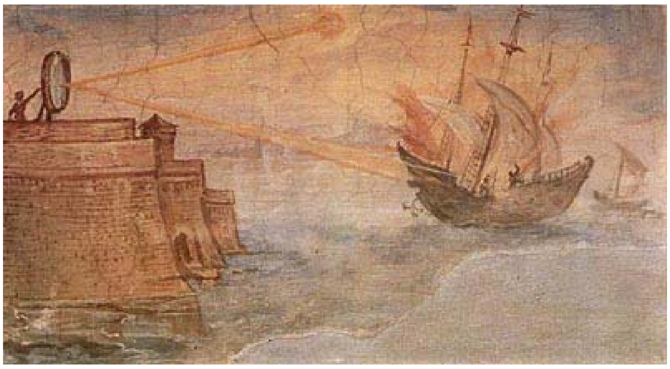


Archimedes, một cư dân của thành phố Syracuse, Hi lạp trên đảo Sicily, sinh vào khoảng năm 287 B.C và chết trong trận tấn công của quân La Mã năm 212. B.C. vào thành phố. Ông là con một nhà thiên văn được vua Hieron của Syracuse sủng ái. Ông có thể đã sống vài năm tại Đại Học Alexandria ở Ai Cập vì ông thường nhắc đến tên ba người bạn là Conon, Dositheus và Eratosthenes, đều là thành viên của Đại Học. Nhiều công trình toán học của ông đã được trao đổi qua thư từ với ba người kế nghiệp đầy năng lực này của Euclid.

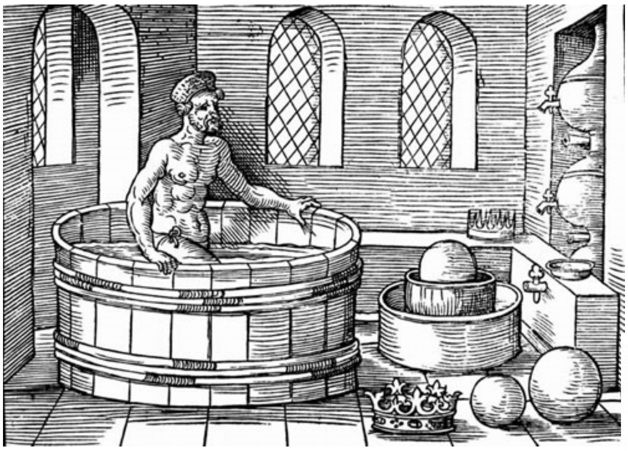
Nhiều câu chuyện đầy màu sắc về Archimedes đã được các sử giá La Mã thuật lại. Chẳng hạn chuyện ông chế tạo những cỗ máy giúp phòng thủ thành Syracuse trong hai năm bi vây hãm bởi quân La Mã dưới sự chỉ huy của tướng Marcellus. Đó là những máy bắn đá có thể điều chỉnh tầm bắn, và di chuyển được trên bệ phóng có bánh xe đến vị trí tuỳ ý trên tường thành và bắn những tảng đá nặng nề về phía những chiến thuyền địch đang đến gần. Đó là những cần cẩu với hệ thống ròng rọc phức tạp có thể móc vào thuyền địch và nhấc bổng chúng lên khỏi mặt nước, đập vỡ chúng ra từng mảnh. Đó là những mảnh gương thủy tinh khổng lồ dùng ánh sáng mặt trời hội tụ để đốt cháy những cánh buồm của quân xâm lược. Và câu phát biểu đầy tính khoa trương của ông: "Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nhấc bổng quả đất" có thể tin được khi người ta đã từng chứng kiến cảnh ông ngồi thoải mái trên bãi biển, một tay quay cần nhẹ nhàng và hệ thống ròng rọc phức hợp chuyển động từ từ kéo chiến thuyền từ ụ trên cảng xuống biển.



Như những nhà toán học lớn khác, Archimedes có sức tập trung trí tuệ rất cao, và không chú ý gì đến ngoại cảnh vây quanh. Câu chuyện nổi tiếng nhất là việc ông suy nghĩ để tìm ra lời giải bài toán đố của nhà vua Hieron nhờ ông tìm xem người thợ kim hoàn có gian lận (pha đồng vào vàng) khi làm chiếc vương miện bằng vàng, với điều kiện là ông không được làm méo mó gì đến vật quí này. Và lời giải đã chớp loè trong trí khi ông đang tắm trong nhà tắm công cộng, ông vui mừng đến nổi đứng bật dậy, lao ra đường, quên cả mặc quần áo, và la toáng lên: "Eureka, euraka." (Tôi đã tìm ra, đã tìm ra). Cái mà ông tìm ra là định luật về sức đẩy mang tên ông.



Archimedes đã tìm ra nhiều định lí hình học bằng những hình vẽ trên lớp tro của lò sưởi hoặc trên lớp dầu mỏng dùng để bôi sau khi tắm. Thực tế là theo các sử gia La Mã ông đã ra đi khi đang mải mê làm toán với hình vẽ trên sa bàn, trong khi quân xâm lược đã chọc thủng hàng phòng vệ của thành Syracuse. Khi thấy bóng một tên lính La Mã xông vào, che mất hình vẽ của mình, ông đã la lớn, bảo hắn tránh ra và nhận một ngọn giáo kết liễu đời mình.



DEATH OF ARCHIMEDES.

Mười công trình của Archimedes được truyền lại cho hậu thế chúng ta, và một vài trước tác đã thất lạc. Những tác phẩm còn lưu truyền đều là những tuyệt tác của luận thuyết toán học, được viết một cách súc tích, hoàn hảo, độc đáo, thể hiện kỹ năng tính toán và chứng minh nghiêm nhặt. Có lẽ đóng góp quan trọng nhất của toán học trong những công trình này là ý tưởng khơi mào cho phép tính vi tích phân đến gần 2000 năm sau mới nở hoa kết trái. Chúng ta sẽ bàn kỹ về thành tựu này.

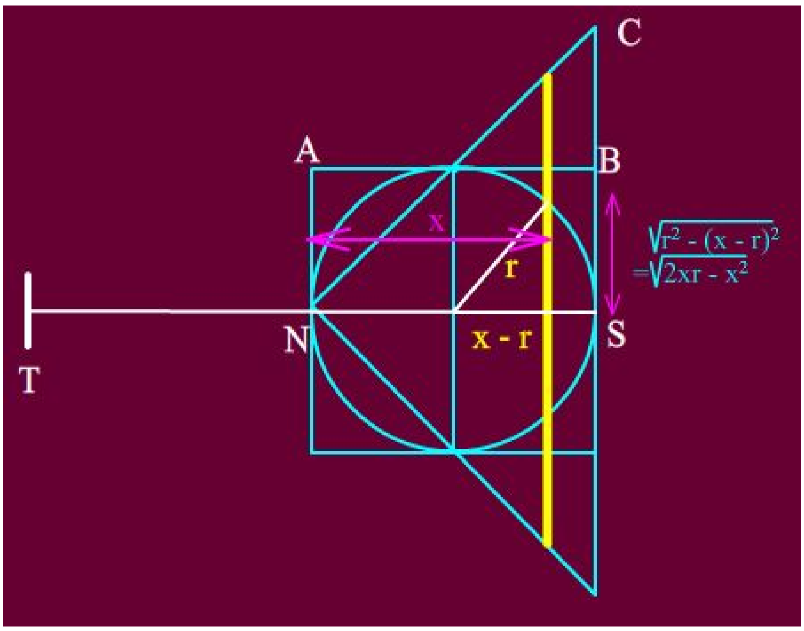
Một vài trang bản thảo của Archimedes cho thấy phương pháp ông vận dụng tương tự như quá trình tính tích phân thực sự. Lấy hai trong những bản thảo này làm minh họa. Thứ nhất là bản thảo: *Về hình cầu và hình trụ*, và thứ hai là bản thảo mơí phát hiện gần đây có tên là *Phương Pháp Luận*. Bản thảo đầu chứa tổng cộng 60 định lí, trong đó xuất hiện lần đầu tiên công thức tính diện tích mặt cầu, đới cầu một đáy và thể tích khối cầu và khối đới cầu một đáy. Kết quả về diện tích và thể tích hình cầu là hệ quả của định lí 33 và 34: ***Hình trụ có đáy bằng với đường tròn lớn của mặt cầu và chiều cao bằng đường kính mặt cầu thì có diện***

tích toàn phần bằng 3/2 diện tích mặt cầu và có thể tích bằng 3/2 thể tích khối cầu. Từ kết quả này ta suy ra được công thức quen thuộc: $S = 4\pi r^2$ và $V = 4\pi r^3/3$ của diện tích S và V của hình cần bán kính r.

Đó là một chuỗi lí luận gồm những bước sắp xếp khéo léo dẫn đến những kết quả nhuộm màu tích phân, trong đó thay vì phương pháp trực tiếp hiện đại tinh tế sử dụng lấy giới hạn, ta bắt gặp một phương pháp gián tiếp và hơi nặng nề, nhưng cũng hiệu quả, gọi là phương pháp vét cạn Eudoxious, qua đó Archimedes đã tìm được công thức diện tích và thể tích hình cầu. Nhưng ta không trình bày phép chứng minh này, mà thay vào đó chúng ta trình bày chi tiết bản thảo đã được Archimedes ghi lại trong cuốn *Phương Pháp Luận*, trong đó ông kể làm thế nào ông đã tìm ra công thức đó.

Cuốn *Phương Pháp Luận* là một bản thảo bị thất lạc rất lâu, chỉ được biết đến do người đời sau nhắc lại, cho đến khi nhà toán sử người Đức nổi tiếng Heiberg tìm ra một bản sao chép của quyển gốc vào năm 1906. Bản sao chép viết trên giấy palimpsest - đó là một lọai giấy mà sau khi tẩy rữa mực in người ta có thể dùng lại. Tuy nhiên sau một thời gian dài lớp chữ đầu tiên của bản thảo *Phương Pháp Luận* lại tái xuất hiện dưới lớp chữ mới. Bản viết này là bức thư của Archimedes gởi cho cho Eratosthenes ở Đại Học Alexandria, báo tin ông tìm ra công thức diện tích và thể tích hình cầu là bằng phương pháp cân bằng. Muốn thế ông cắt hình cầu ra thành vô số lát nhỏ bằng những mặt phẳng song song, rồi treo nó tại một đầu của đòn bẩy sao cho nó cân bằng với một khối mà trọng tâm đã được biết rõ. Hãy minh họa ý tưởng này trong bài toán tính thể tích của Archimedes.

Gọi r là bán kính hình cầu. Đặt hình cầu với đường kính nằm ngang theo trục hòanh, với cực bắc N nằm ở gốc. Dựng hình trụ và hình nón bằng cách quay hình chữ nhật NABS kích thước 2r x r và tam giác NCS vuông cân quanh trục hòanh. Bây giờ cắt ra từ ba khối những lát mỏng thẳng đứng cách N một khỏang x và có độ dày là Δx. Thể tích của các miếng này xấp xỉ bằng:



từ khối cầu : $\pi x(2r - x)\Delta x$

từ khối trụ : $\pi r^2 \Delta x$

từ khối nón : $\pi x^2 \Delta x$

Mang những miếng cắt ra từ hình cầu và hình nón rồi treo nó với tâm ở điểm T, trong đó TN = 2r. Momen của hai khối này đối với N là:

$$[\pi x(2r - x)\Delta x + \pi x^2\Delta x]2r = 4\pi r^2\Delta x$$

tức bằng 4 lần momen của miếng cắt ra từ hình trụ khi miếng đó ở nguyên vị trí. Cộng một số lớn các miếng này với nhau, ta được:

2r[thể tích khối cầu + thể tích khối nón] = 4r[thể tích khối trụ]

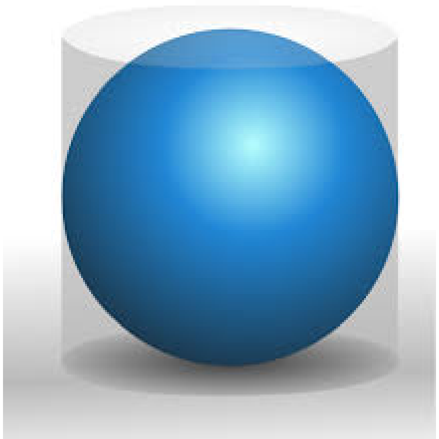
<=> 2r[thể tích khối cầu + $8\pi r^3/3$] = $8\pi r^4$

<=> thể tích khối cầu = $4\pi r^3/3$

Đây là cách mà Archimedes khám phá công thức thể tích khối cầu. Nhưng lương tâm TOÁN học không cho phép ông nhận phương pháp này là cách chứng minh đúng đắn, và vì thế sau đó ông đã dùng phương pháp vét cạn để chứng minh.

Trong phương pháp cân bằng này ta nhìn thấy một ý tưởng phì nhiêu khi xem một đại lượng là tổng vô hạn của những thành phần vi tế. Với ngôn ngữ hiện đại của giới hạn, phương pháp này chính là ý tưởng nền tảng của phép tính tích phân. Với quan điểm này, công trình của Archimedes xứng đáng được gọi là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC.

Archimedes quá thích thú với công trình *Về hình cầu và hình trụ* đến nỗi ông bày tỏ ước nguyện sau khi chết người ta sẽ khắc trên bia mộ ông phù điêu hình cầu nội tiếp trong hình trụ. Tướng Marcellus, để tỏ lòng trân trọng một bậc anh tài, sau khi chinh phục Syracuse, đã chôn cất ông trọng thể và cho xây dựng mộ bia đúng như sở nguyện của ông. Nhiều năm sau, khi Cicero, giữ chức thuế quan cho chính quyền La Mã, đến Syracuse công tác, không ai còn nhớ đến địa điểm của ngôi mộ. Sau nhiều ngày truy tìm, ông đã tìm được mộ bia nằm lăn lốc trong đám cỏ rậm. Ông cho dựng lại và sửa sang mộ phần. Nhưng rồi trải qua năm tháng, ngôi mộ cũng bị lãng quên, và với sự phát triển của thành phố, nó đã biệt vô âm tín.



Tuy nhiên, vào năm 1965, trong khi đào móng cho công trình xây dựng một khách sạn mới ở Syracuse, cần cẩu mang lên một tấm bia cổ trên đó có khắc một hình trụ ngọai tiếp một hình cầu. Và một lần nữa, mộ bia của người Syracuse kiệt xuất nhất đã được tìm thấy lại.

Huy Chương Toán Học Fields
khắc chân dung Archimedes

10. Cú hích của thiên văn học

Sự khởi thủy môn lượng giác thì mơ hồ. Vào thời gian trước nền văn minh Hi lạp, trong các bản thảo bằng giấy dó ở vùng Rhind (khoảng 1650 B.C) có chứa những bài toán liên quan đến cotang của một góc nhị diện tạo bởi mặt bên và đáy của một hình chóp đều. Ngoài ra cũng có những bản đất sét hình nêm gọi là bản Plimpton 322 (1900 đến 1600 B.C.) có chứa một bảng tính 1/cosin của mười lăm góc từ 45^o đến 30^o. Đi sâu vào các nghiên cứu những di sản toán học của Mesopotamia cổ sẽ phát hiện một phát triển đáng kể của lượng giác học thực hành. Các nhà thiên văn học Babylon đã thu thập một lượng đáng kể những dữ kiện quan sát, và nhiều tư liệu này đã truyền lại cho người Hi lạp. Chính từ nền thiên văn sơ khai này đã ra đời môn lượng giác cầu.

Một trong những nhà thiên văn Hi lạp đầu tiên là Aristarchus thành Samos (310-230 B.C.) được cho là đã vận dụng toán học vào thiên văn và là người đầu tiên đưa ra thuyết thái dương hệ. Không có công trình nào của ông được lưu truyền đến tay chúng ta, nhưng người ta cho rằng, trong công trình *Về Kích Thước và Khoảng Cách Mặt Trời Và Mặt Trăng*, ông đã sữ dụng bất đẳng thức sau:

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{\tan a}{\tan b}, \text{ trong đó } 0 < b < a < \pi/2.$$

Nhà toán học-thiên văn học của Hi lạp thời cổ nổi tiếng tiếp theo là Hipparchus, sinh tại Nicaea của Tiểu Á. Mặc dù ông đã thông báo một quan sát xuân phân ở Alexandria năm 146 B.C. , những quan sát thiên văn quan trọng nhất của ông được thực hiện ở đài quan sát ở Rhodes. Được nổi danh là người quan sát chính xác và tỉ mỉ, ông được vinh danh với nhiều thành tựu như xác định được tuần trăng trung bình chỉ sai 1 giây so với đo lường hiện đại, tính toán được chính xác độ nghiêng của quỹ đạo trái đất và xác định được cận điểm của mặt trăng, và đã liệt kê đến 850 định tinh.

Ông cũng khuyến cáo việc sử dụng vĩ độ và kinh độ để xác định vị trí trên mặt địa cầu. Và có thể ông là người đầu tiên chia đường tròn ra làm 360^o. Mặc dù sự hiểu biết của chúng ta về những công trình này chỉ là qua các tài liệu trung gian - vì không có tác phẩm nào của Hipparchus còn lưu truyền lại - chúng ta có thể nghĩ rằng Hipparchus đã nắm vững về lượng giác cầu cơ bản.

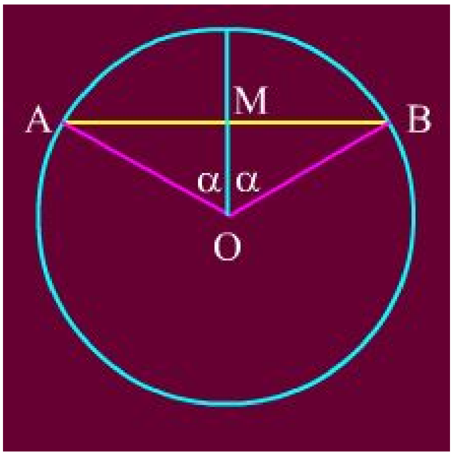
Một liên hệ trực tiếp hơn và rất quan trọng đến lượng giác của Hipparchus là qua lời trích dẫn của Theon thành Alexandria thế kỉ thứ 4 giới thiệu một bộ 12 quyển của Hipparchus về cách lập ra bảng lượng giác. Bảng này đã mất tích nhưng một quyển tiếp theo do Claudius Ptolemy (85 - 165) được cho là biên tập từ Hipparchus còn lưu lại. *Bảng lượng giác Ptolemy* cho độ dài các dây cung trương góc ở tâm của một đường tròn cho trước từ 1/2 độ đến 180 độ, cách nhau từng nửa độ một. Bán kính đường tròn được chia thành 60 phần bằng nhau và chiều dài của dây cung được tính theo các phần nhỏ này theo hệ lục thập phân. Nếu dùng kí hiệu crdα để chỉ độ dài của dây cung trương góc α, ta tìm thấy trong bảng đó số liệu sau:

crd $36^o = 37^p\ 4'\ 55''$

có nghĩa là độ dài dây cung của góc ở tâm 36^o bằng 37/60 (hoặc 37 phần nhỏ) bán kính, cộng thêm 4/60 của một phần nhỏ, và thêm 55/360 của một phần nhỏ này.

Theo hình bên, bảng độ dài dây cung này tương đương với bảng tính sin lượng giác, vì:

$$\sin\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{đg.\,kính} = \frac{crd\ 2\alpha}{2r}$$

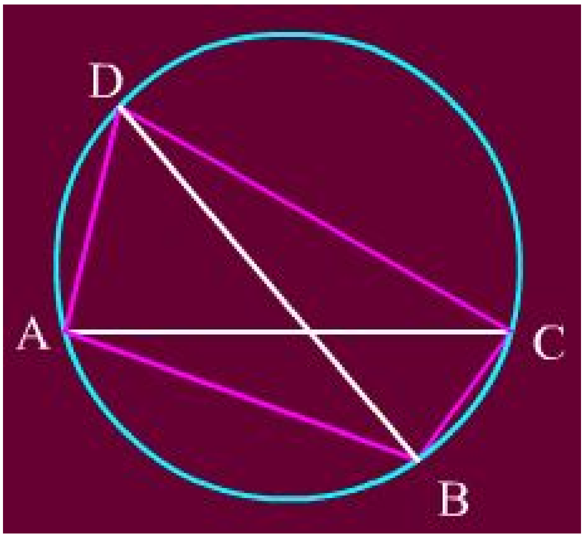


Do đó bảng của Ptolemy thực tế là cho ta giá trị của sin những góc từ 0^o đến 90^o, cách nhau 1/4 độ.

Có tài liệu cho rằng Hipparchus đã dùng bảng của ông và hiển nhiên biết vài công thức hiện giờ được dùng để giải các tam giác cầu.

Ngài Theo cũng đề cập đến một công trình 6 quyển về dây cung đường tròn do Menelaus của Alexandria soạn ra (khoảng 100), nhưng trước tác này cũng thất truyền.Tuy nhiên còn công trình ba quyển của Menulaus có tên là *Sphaerica*, còn lưu lại bằng tiến Ả rập. Tác phẩm này cho ta thấy được sự phát triển của môn lượng giác của người Hi lạp.

Sự kiện có quá nhiều công trình thiên văn Hi lạp sơ khai đã biến mất nguyên nhân là do tác phẩm của Ptolemy quá xuất sắc đã khiên chúng bị lu mờ và chìm vào quên lãng. Đó là quyển *Tuyển Tập* TOÁN *Học*, viết vào khoảng 150 A,D, một công trình thiên văn đầy đủ, súc tích và đẹp đẽ. Để phân biệt tác phẩm này với các công trình tầm thường khiên tốn hơn, các nhà toán sử thêm vào tên tác phẩm từ magisse (vĩ đại nhất). Về sau, những nhà phiên dịch Ả rập còn thêm tiếp đầu ngữ al, và vì thể tác phẩm này có tên *Almagest*. Bộ sách gồm 13 quyển và trong quyển I, ngoài những dữ liệu thiên văn cơ bản, còn có bảng số độ dài dây cung đã nói ở trên, và phần giải thích cách lập bảng số từ một công thức nổi tiếng mang tên ông, định lí Ptolemy: ***Trong một tứ giác nội tiếp được, tích hai đường chéo bằng tổng tích hai cặp cạnh đối.***



Chắc chắn lượng giác học thực hành sẽ không tiến bộ nhiều nếu không có bảng số lượng giác. Cách lập bảng lượng giác một cách đầy đủ và có hệ thống do đó đánh dấu MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC. Công việc tiếp theo trong bài này là theo dõi phương pháp mà Ptolemy dùng để lập ra bảng sin nói trên. Để tiện, ta dùng phân số để diễn đạt độ dài thay vì dùng hệ lục thập phân như Ptolemy đã dùng. Và ta trình bày từng bước tính một như sau:

1. Ta đã biết cách chứng minh định lí Ptolemy trong một tứ giác nội tiếp ABCD:

AC. BD = AB.CD + AD. BC.

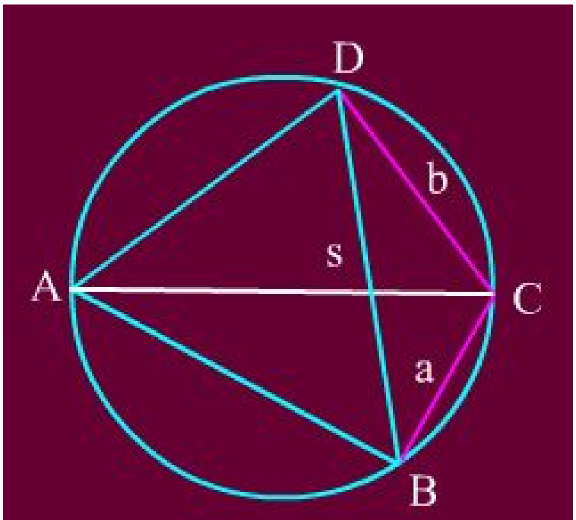
Tiếp theo ta thiết lập ba hệ quả :

2. Hệ quả 1: Nếu a và b là hai dây cung của đường tròn bán kính đơn vị, thế thì :

$\mathbf{s = (a/2)(4 - b^2)^{1/2} + (b/2)(4 - a^2)^{1/2}}$

trong đó s là độ dài của dây cung của tổng hai cung.

CM: Áp dụng định lí Ptolemy cho hình bên (trên) trong đó AC là đường kính, BC = a và CD = b.

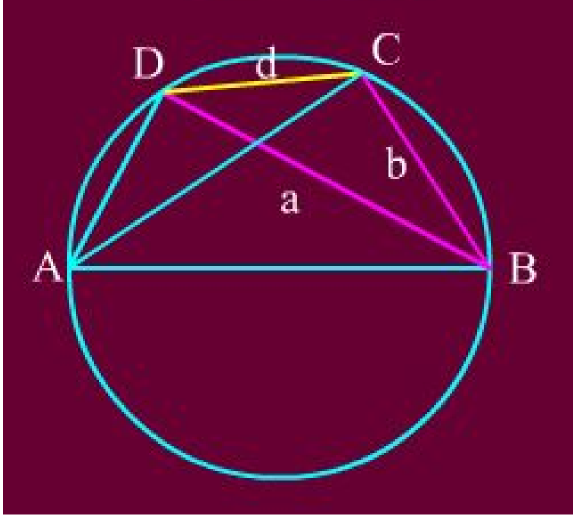


3. Hệ quả 2: Nếu a và b, a > b, là hai dây cung của đường tròn bán kính đơn vị , thế thì :

$$\mathbf{d = (a/2)(4 - b^2)^{1/2} - (b/2)(4 - a^2)^{1/2}}$$

trong đó d là độ dài của dây cung của hiệu hai cung.

CM: Áp dụng định lí Ptolemy cho hình bên (dưới) với AB là đường kính, BD = a và BC = b.



4. Hệ quả 3: Nếu t là độ dài dây cung nhỏ của đường tròn bán kính đơn vị, thế thì:

$$\mathbf{h = [2 - (4 - t^2)^{1/2}]^{1/2}}$$

CM: Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác của hình bên dưới với AC là đường kính, BD = t và BD vuông góc với AC. Ta được :

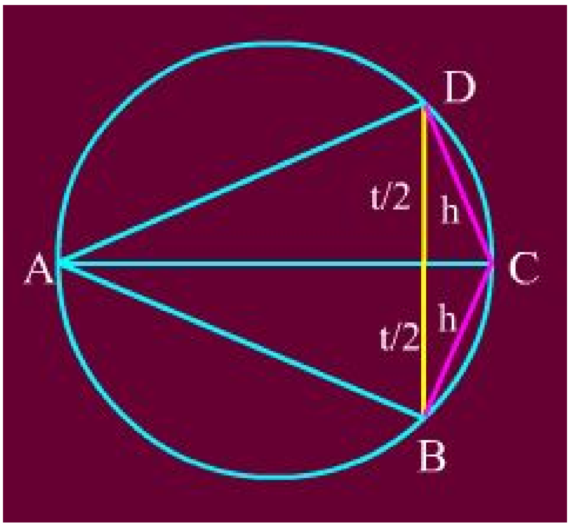
$$2t = 2h(4 - h^2)^{1/2}$$

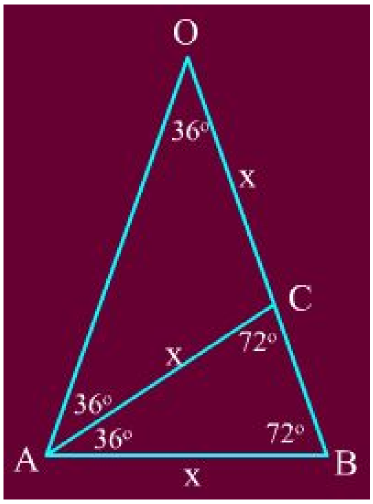
Bình phương hai vế và thu gọn, ta được :

$$h^4 - 4h^2 + t^2 = 0$$

Giải phương trình này, và lấy nghiệm nhỏ vì h là độ dài dây cung nhỏ, ta được :

$$h^2 = 2 - (4 - t^2)^{1/2}$$





5. Xét tam giác cân AOB với góc đỉnh AOB = 36^o. Kẻ phân giác AC của góc A. Hai tam giác AOB và BAC đồng dạng cho ta:

AB/CB = OB/AB

Đặt AB = x và cho OB = 1, ta có :

$x/(1 - x) = 1/x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,6180$ (lấy 4 chữ số thập phân). Đây chính là tỉ số vàng ta đã gặp ở bài 5.

Vậy trong đường tròn bán kính 1, ta có:

crd 36^o = 0,6180.

6. Vì trong đường tròn đơn vị, crd 60^o = 1, dùng hệ quả 2, ta được:

crd 24^o = crd(60^o - 36^o) = 0, 4158

7. Áp dụng hệ quả 3, ta có thể tính độ dài dây cung của 12^o, 6^o, 3^o, 90', và 45', được :

crd 90' = 0,0262, crd 45' = 0.0131.

8. Theo bất đẳng thức :

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} \quad \text{với } b < a < 90^o$$

mà ta đã trình bày ở đầu bài, đã được Aristarchus biết đến, cho ta :

crd 60'/crd45' < 60/45 = 4/3

hay crd 1^o < (4/3)(0,0131) = 0, 01747.

Cũng thế :

crd 90'/crd 60' < 90/60 = 3/2

hay crd 1^o > (3/2)(0,0262) = 0, 01747

Từ đó suy ra giá trị gần đúng đến 4 chữ số thập phân của crd 1^o = 0, 0175.

9. Dùng hệ quả 3, ta có thể tính được crd $1/2^o$.

10. Và như thế chúng ta có thể thiết lập bảng độ dài dây cung của đường tròn đơn vị từng 1/2 độ một.

Nhiều công trình về sau của lượng giác thực hành là lập những bảng số càng ngày càmg tốt hơn. Như nhà toán học Hồi Giáo Abul-wefa (940-998) đã lập bảng sin và tan từng 15 phút một. Sau đó một bảng sin đã được nhà toán học thành Vienna là Georg von Peurbach (1423-1461) lập và bảng tan do nhà toán học Đức Jahan Muller (1436-1476). George Joachim Rhaeticus (1514-1576), nhà thiên văn toán hàng đầu của thế kỉ 16, bỏ ra 12 năm, mướn các thợ tính toán, đã lập ra hai bảng tính lượng giác nổi tiếng vẫn còn hữu dụng. Một bảng tính gồm 10 chữ số thập phân các giá trị của sáu hàm lượng giác, cách nhau từng 10" một, và bảng giá trị sin gồm 15 chữ số thập phân.

Cũng cần nhắc lại là Ban Tư Vấn Toán Học của Mỹ đã nhất trí quyết định hủy bỏ bảng số lượng giác khỏi Cẩm Nang Toán Học CRC nổi tiếng trong lần tái bản thứ năm. Sự ra đời của máy tính bỏ túi và sự lưu hành rộng rãi của nó đã khai tử bảng lượng giác có tuổi thọ hơn một ngàn tuổi.

11. Nhà lý thuyết số vĩ đại đầu tiên

Chúng ta đều nhất trí rằng những cú hích đầu tiên tạo ra sự phát triển lý thuyết số đã được Pythagoras và các đệ tử của ông phát khởi, vì theo triết lý của họ, các số nguyên sẽ thống trị thế giới. Nhiều công trình của họ đã trở thành cơ sở cho các phép bí tích số và bói toán. Như Iamblichus, một triết gia Tân Platon rất có ảnh hưởng sống vào khoảng 320 A.D. , đã cho rằng Pythagoras khám phá ra các số ***thân hữu***.

Hai số nguyên gọi là thân hữu nếu số này là tổng các ước số thích đáng của số kia. Như 284 và 220 là hai số thân hữu vì các ước số của 220 là 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, và 110 (không kể 220) có tổng là 284, và các ước số của 284 là 1, 2, 4, 71, và 142 (không kể 284) có tổng là 220. Các cặp số thân hữu mang một hào quang huyền bí, và các trò mê tín về sau gán hai người nào ứng vào hai lá bùa mang hai con số này sẽ có một tình bạn bền chặt giữa họ. Những số như thế đóng vai trò quan trọng trong ma thuật, phù thủy, chiêm tinh, và bói toán.

Sau cặp số này, 284 và 220, không có cặp số thân hữu mới nào được tìm ra cho mãi đến khi nhà lý thuyêt số Fermat người Pháp trong năm 1636 tuyên bố rằng số 17296 và 18416 là cặp số thân hữu khác. Hai năm sau, René Descartes, nhà toán học và triết gia Pháp, cho cặp số thứ ba. Nhà toán học Thụy Sĩ Leonard Euler nghiên cứu cách tìm có hệ thống các cặp thân hữu và, năm 1747, cho một danh sách gồm 30 cặp, sau đó mở rộng đến hơn 60 cặp. Điều ngạc nhiên là năm 1866, một học sinh người Ý mười sáu tuổi đã nêu cặp số thân hữu nhỏ là 1184 và 1210 mà các nhà toán học đã bỏ sót. Ngày nay hơn 1000 cặp số thân hữu đã được tìm ra.

Những số khác ít nhiều mang tính huyền bí thường được gán cho Pythagoras còn phải kể là những số ***hoàn hảo***, số ***khiếm khuyết*** và số ***dư thừa***. Gọi N là tổng các ước số thích đáng của một số nguyên dương. Số n được gọi là hoàn hảo, khiếm khuyết, dư thừa khi $N = n$, $N < n$, $N > n$. Do đó số 6 là hoàn hảo vì có ước là 1, 2, 3 và $1 + 2 + 3 = 6$, 8 là số khiếm khuyết vì $1 + 2 + 4 < 8$ và 12 là dư thừa vì $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$.

Cho đến năm 1952 chỉ có 12 số hoàn hảo được tìm ra, tất cả đều chẵn, ba số đầu là 6, 28, 496. Định lí cuối cùng trong quyển 9 của bộ Các Yếu Tố của Euclid chứng minh rằng số nếu $2^n - 1$ là một số nguyên tố thì số $2^{n-1}(2^n - 1)$ là số hoàn hảo. Số hoàn hảo cho bởi công thức Euclid là số chẵn và Euler đã chứng minh rằng mọi số hoàn hảo chẵn phải thuộc dạng này. Có tồn tại hay không số hoàn hảo lẻ là một bài toán nổi tiếng chưa giải được trong lý thuyết số; và ta được biết rằng nếu có, con số đó phải lớn hơn 10^{100}.

Năm 1952, với sự giúp đở của máy tính SWAC, thêm năm số hoàn hảo được tìm thấy, ứng với n = 1521, 607, 1279, 2203, và 2281 trong công thức của Euclid. Năm 1957, dùng máy BESK, một số khác được tìm ra ứng với n = 3217, và trong năm 1961, với máy IBM 7090, thêm hai số được phát hiện với n = 4253, 4423. Đến giờ (tại thời điểm quyển sách này được viết 1985) đã có đến 27 số hoàn hảo được tìm thấy.

Số nguyên tố, viên đá nền tảng tạo thành mọi số nguyên khác, đã trải qua một lịch sử khá dài, khởi từ những ngày huy hoàng của Hi lạp cổ cho đến tận ngày nay. Euclid, trong định lí 20 của Quyển IX bộ *Các Yếu Tố* , đã chứng minh rằng tập hợp các số nguyên tố là vô tận. Một tổng quát hoá khá đẹp của định lí này là định lí sau do Dirichlet (1805-1859) thiết lập, nói rằng mỗi cấp số cộng : a , $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, . . . trong đó a và d nguyên tố cùng nhau, chứa đựng vô số số nguyên tố. Cách chứng minh định lí này không đơn giản chút nào.

Chắc chắn kết quả đáng kinh ngạc đối với số nguyên tố là định lí gọi là định lí số nguyên tố. Gọi A_n là số các số nguyên tố nhỏ hơn n . Định lí này nói rằng :

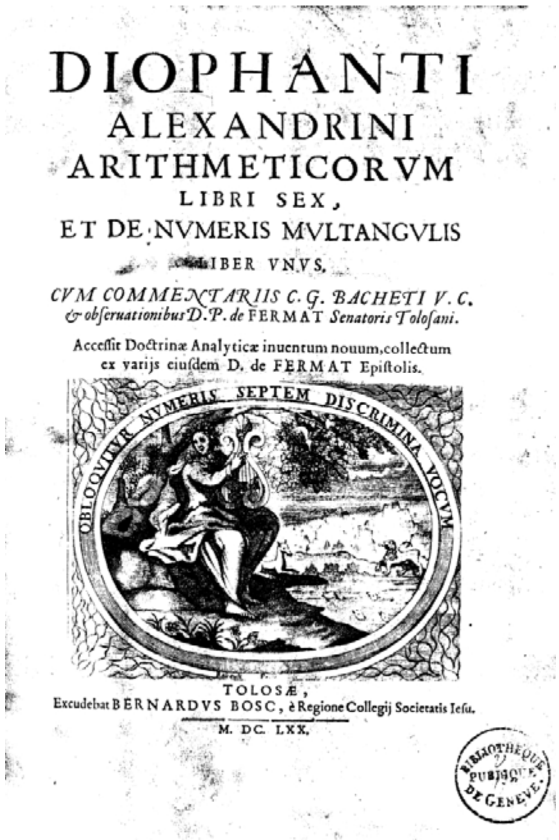
***A_n Ln (n) / n tiến đến 1 khi n tăng lên vô cực*.**

Nói cách khác, A_n / n, gọi là mật độ của số nguyên tố, xấp xỉ bằng 1 / Ln(n), và càng gần bằng khi n càng lớn. Định lí được dự đoán bởi nhà toán học Gauss (1777-1855) lúc ông 15 tuổi khi khảo sát một bảng số nguyên tố, và được chứng minh một cách độc lập năm 1896 bởi nhà toán học Pháp và Bỉ là Hadamard và Poussin.

Một bảng các số nguyên tố là vô giá khi nghiên cứu về chúng. Một bảng chứa các số nguyên tố đến 24000 đã được in năm 1659 như một phụ lục của một quyển sácg đại số. Năm 1668, John Pell ở Anh đã in bảng số đến số nguyên tố nhỏ hơn 100000. Thành tựu lớn nhất là bản thảo chưa in của nhà toán học Mỹ Lehmer (1867-1938) đã tìm ra những số nguyên tố lớn đến 100.000.000 mà ông tích lũy trong những khi rảnh rỗi trong suốt hơn 20 năm.

Có nhiều những câu hỏi chưa giải được về số nguyên tố. Ví dụ: có phải có vô số số nguyên tố dạng $n^2 + 1$? Có phải lúc nào cũng có một số nguyên tố giữa hai số n^2 và $(n + 1)^2$? Có vô số số nguyên tố Fermat hay không - đó là số nguyên tố dạng $2^{2^n} + 1$?

Trong lịch sử toán học, có một nhân vật nổi bật, xứng đáng gọi là thiên tài đầu tiên trong lý thuyết số và một trong các công trình của ông gây ảnh hưởng đến các nhà lý thuyết số Âu châu về sau sâu xa đến nổi có thể vinh danh tác phẩm này là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC. Người đó là Diophantus ở Alexandria, và tác phẩm được nhắc đến là quyển *Arithmetica* (Số Học) nổi tiếng của ông. Mặc dù có chứng cớ cho thấy ông thuộc thế kỷ thứ nhất, nhưng hầu hết các sử gia đều cho ông ở vào thế kỷ thứ ba. Ngoài sự kiện ông thành đạt ở Alexandtia, người ta không biết nhiều về đời tư của ông.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Diophantus viết ba công trình toán học: *Số Học* gồm 13 quyển mà quyển 6 đã lạc mất. *Về Các Số Đa giác*, chỉ còn một phần nhỏ được lưu truyền, và *Porisms*, đã thất truyền.

Bộ *Số Học* là bộ sách vĩ đại và độc đáo. Qua đó cho thấy tác giả là một bậc kì tài trong lãnh vực lý thuyết đại số. Phần còn lưu truyền đề cập phép giải 130 bài toán đại số rất đa dạng, đưa đến việc giải phương trình bậc 1, bậc 2 và một phương trình bậc 3 đặc biệt. Quyển đầu tiên bàn về phương trình một ẩn, các quyển khác đề cập các phương trình vô định 2 hay 3 ẩn.

Dù cách giải của ông là không tổng quát nhưng qua đó cho thấy ông sáng tạo những kỷ năng giải toán điêu luyện vận dụng cho từng bài riêng lẻ. Diophantus chỉ công nhận nghiệm số là những số hữu tỉ dương và thường thường ông chỉ tìm một nghiệm mặc dù phương trình có thể có nhiều nghiệm.

Sau đây là một vài ví dụ:

1. Bài số 17, Quyển I: Tìm bốn số mà tổng của ba số lấy từng ba một là 22, 24, 27, và 20.
2. Bài 6, Quyển III: Tìm ba số sao cho tổng của chúng là số chính phương và tổng của bất cứ cặp nào cũng là số chính phươngs. (Diophantus tìm ra 80, 320, 41).
3. Bài 7, Quyển III: Tìm ba số hạng của một cấp số cộng sao cho tổng của bất cứ cặp nào cũng là số chính phương. (Diophantus tìm ra 120.5, 840.5, 1560.5)
4. Bài 13, Quyển III: Tìm ba số sao cho tích của hai số bất kì cộng với số thứ ba là một số chính phương.
5. Bài 10, Quyển IV: Tìm hai số sao cho tổng của chúng bằng tổng lập phương của chúng. (Diophantus tìm ra 5/7 và 8/7).
6. Bài 21, Quyển IV: Tìm ba số hạng của một cấp số nhân sao cho hiệu của bất cứ hai số hạng nào cũng là một số chính phương. (Diophantus tìm ra 81/7, 144/7, 256/7)
7. Bài 1, Quyển VI: Tìm ba cạnh một tam giác vuông sao cho độ dài cạnh huyền trừ đi mỗi cạnh góc vuông là một số lập phương. (Diophantus tìm ra 40-96-104).

Những bài toán đại số vô định trong đó ta chỉ phải tìm những nghiệm hữu tỉ được gọi là bài toán Diophantus. Tuy nhiên, theo quan điểm hiện đại, ta chỉ xét phương trình với những nghiệm số là nguyên. Thật không đúng khi cho rằng Diophantus là người đã nghĩ ra những dạng toán đó nhưng chính ông mới là người thừa hưởng một tài năng xuất chúng để giải các bài toán đó.

Chúng tôi khép lại bài thuyết trình này bằng cách nhắc lại bài toán nổi tiếng nhất của Diophantus. Bài số 8, Quyển II nói: Chia một số chính phương thành hai số chính phương", tức giải phương trình nguyên: $a^2 + b^2 = c^2$. Bài toán này ta đã biết cách giải và có vô số nghiệm nguyên, gọi là những số Pythagoras.

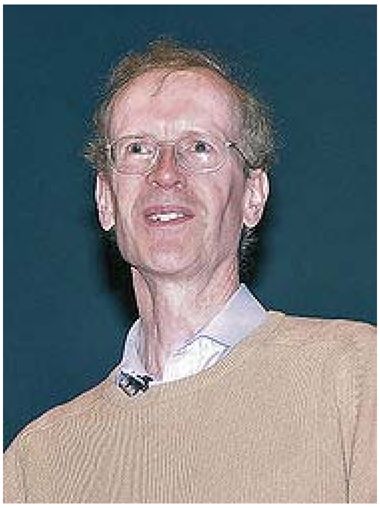
Khi đọc đến phần này, Fermat viết vào lề của quyển sách những dòng đáng ngờ như sau:

"Còn phương trình nguyên $a^n + b^n = c^n$ với $n > 2$ đều là phương trình vô nghiệm. Tôi đã nghĩ ra một cách chứng minh tuyệt vời định lí này nhưng lề trang hẹp quá không đủ chỗ viết ra được" .

Diophantus

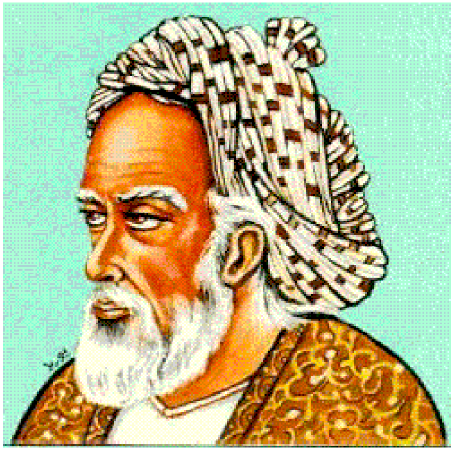
Fermat

Bài toán này mệnh danh là "định lí" cuối cùng của Fermat, và việc ông có chứng minh được nó thật không vẫn còn là một bí ẩn. Sau khi ông mất, rất nhiều các nhà toán học lớn đã lao vào giải bài toán nhưng không có ai thành công. Chính bản thân Fermat đã chứng minh định lí khi n = 4, còn Euler đã chứng minh với n = 3. Năm 1825, Dirichlet và Legendre chứng minh định lí khi n = 5, và năm 1839 Lamé chứng minh khi n = 7. Năm 1908, nhà toán học Đức Wolfskehl gởi 100000 mác đến Hàn Lâm Viện Khoa Học trao giải thưởng cho ai chứng minh được định lí này. Kết quả là một cơn đại hồng thủy của những bài giải đến từ đủ hạng người mong tìm chút danh tiếng và tiền tài. Hơn cả bài toán chia ba một góc hay cầu phương hình tròn, không có bài toán ám ảnh nhiều người và nhận được nhiều bài giải sai như bài toán này của Fermat. Cho đến trước năm 1995, định lí đã được chứng minh đúng khi n < 100000. Người giáng một đòn "kết liễu" bài toán này là nhà toán học Andrews Wiles, giáo sư toán tại Đại học Princeton, sau hơn 358 năm thách thức các bộ óc siêu việt của nhân loại. Xem thêm tại mathworld



14. Nhà thi sĩ- toán học của Khorasan

Trong nửa sau của thế kỉ 11, ba người trẻ tuổi Ba Tư, thông minh và có năng lực, cùng tùng học với một trong những người hiền triết nhất thành Khorasan là Imam Mowaffak. Ba thanh niên đó là - Nizam, Hasan và Omar Khayyam - trở thành ba bạn thân thiết. Thời đó người ta tin rằng các học trò của Ngài Imam thế nào cũng thành đạt nên Hasan một hôm đề nghị với hai bạn, họ sẽ cùng nhau kết nghĩa và thề thốt rằng, trong ba người, nếu có người nào gặp được vận lớn thì sẽ chia đều may mắn cho hai người kia. Năm tháng trôi qua, Nizam trở thành người gặp hồng phúc, khi ông trở thành tể tướng dưới triều vua Alp Arslan. Không bỏ lỡ cơ hội, hai người bạn bèn tìm đến và nhắc lại lời thề xưa thuở còn đi học.



Hasan xin một chức quan và được nhà vua đồng ý qua sự giới thiệu của Tể tướng Nizam. Nhưng là một người ích kỹ và vô ơn, Hasan mưu tính hất cẳng Nizam nhưng bất thành, bị giáng chức và trục xuất. Còn Omar, vốn không màng đến tước vị hoặc chức vụ, chỉ xin phép được sống trong bóng mát vận hội của ngài tể tướng, nơi ông có thể quảng bá khoa học và toán học và cầu nguyện cho bạn mình lộc thọ dồi dào. Cảm kích trước tấm chân thành và sụ khiêm cung của bạn, ngài tể tướng chu cấp cho Omar mọi tài vật giúp ông thỏa chí nguyện.

Sau nhiều phen bôn ba và lận đận, cuối cùng Hasan trở thành người cầm đầu một nhóm cuồng tín, chiếm đóng thành Alamut năm 1090 trong vùng núi non phía tây biển Caspian. Dùng thành làm pháo đài và nơi xuất phát những trận đột kích các đoàn thương buôn qua lại. Hasan và đồng bọn gieo rắc kinh hoàng khắp thế giới Hồi giáo. Hasan được gán bí danh "lão già vùng núi", và một trong vô số nạn nhân của y là người bạn thân thời trẻ Nizam.

Trái ngược với cuộc đời bão tố và hủy diệt của Hasan, cuộc đời của Omar yên tĩnh và xây dựng. Ông sống yên bình và đóng góp một cách xứng đáng cho nền văn thơ và khoa học của thời đại ông.

Bài viết này nhằm tuyên dương một thành tựu toán học nổi bật của học giả Omar - một thành tựu đáng được gọi là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC. Trước tiên xin nhắc lại vài khái niệm nền tảng.

Gọi là phương trình đa thức thực một ẩn x là phương trình có dạng:

$$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

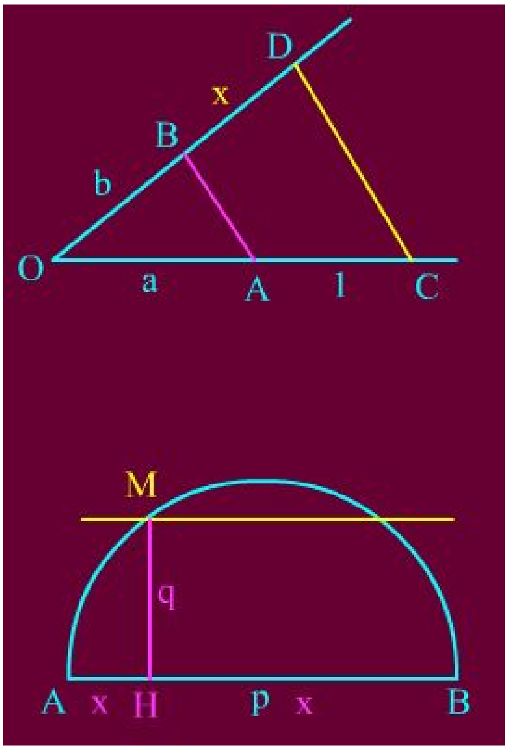
trong đó n là số nguyên dương và $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là những số thực với a_o khác 0. Một giá trị của x thỏa mãn phương trình được gọi là nghiệm của phương trình. Một trong những nhiệm vụ chính yếu của đại số thời cổ là tìm ra phương pháp tổng quát tìm nghiệm của phương trình, gọi là giải phương trình ấy. Vì thời xưa ta chỉ biết đến số thực dương, do đó trong khoảng mấy trăm năm qua, giải phương trình chỉ là tìm nghiệm thực dương của .nó, nếu có. Số n được gọi là bậc của phương trình Việc giải phương trình bậc 1 bằng phương pháp đại số hay hình học đều không mấy khó khăn. Nếu phương trình bậc 1 một ẩn có nghiệm dương thì nó luôn có thể đưa về dạng: ax = b, trong đó a, b là những số dương. Về đại số, nghiệm là x = b/a. Về hình học, x là số tỉ lệ thứ tư đối với ba độ dài a, b và 1, nghĩa là a : b = 1 : x , và x có thể được xác định bằng thước và compa trong phép dựng cho bởi hình dưới (trên), trong đó COD là một góc bất kì, OA = a, OB = b, AC = 1, và CD được kẻ song song với AB.

Điều thú vị là người Ai cập cổ giải phương trình bậc 1 bằng một phương pháp mà sau này người Âu châu gọi là qui tắc giả sử. Theo đó, để giải phương trình:

$x + x/7 = 24$

Ta giả sử x = 7, thế thì x + x/7 = 8, thay vì 24.

Vì 8 nhân 3 là 24, do đó x phải bằng 3. 7 = 21.



Mặc dù phương trình bậc 2 phức tạp hơn phương trình bậc 1 nhưng các nhà toán học thời cổ cũng giải được phương trình này bằng phương pháp đại số và hình học. Cách giải đại số bằng phương pháp phân tích bình phương hay giải bằng công thức mọi học sinh trung học đều đã nắm. Người Babylon cổ cách đây 4000 năm đều đã biết cả hai phương pháp giải này.

Người Hi lạp giải bằng hình học phương trình bậc 2:

$x^2 - px + q = 0$ như sau (hình bên, dưới):

1. Dựng nửa đường tròn đường kính AB = p.

2. Dựng đường thẳng song song và cách đường kính một khoảng là q. Đường này cắt đường tròn tại M.

3. Kẻ MH vuông góc AB thế thì nghiệm của phương trình là độ dài đoạn AH hay BH.

Phương trình bậc 3 là một bài toán thử thách. Người Babylon dùng bảng tính các giá trị của $n^3 + n^2$ với một số giá trị của n để giải một số phương trình bậc 3 đặc biệt.

Archimedes, trong một tài liệu còn lưu truyền, đã khảo sát điều kiện để một phương trình bậc 3 có nghiệm dương. Còn phương pháp giải phương trình bậc 3 tổng quát chỉ được biết đến vào thế kỉ thứ 16 do một một nhà toán học Ý tìm ra. Phép giải phương trình bậc 3 bằng phương pháp hình học được tìm ra sớm hơn 5 thế kỉ, vào thế kỉ thứ 11, bởi nhà thi sĩ-toán học Ba tư là Omar Khayyam đã kể trên.

Thời kì từ khi Đế quốc La mã sụp đỗ vào giữa thế kỉ thứ 5 đến thế kỉ thứ 11 được gọi là thời đại Đen Tối của Âu châu, bởi vì trong thời gian này nền văn minh và học thuật của Âu châu xuống đến mức thấp nhất. Tuy nhiên lúc này lại là thời kì vàng son của đế quốc Ả rập. Trong vòng một thập kỷ sau khi nhà tiên tri Mohamed chạy từ Mecca đến Medina vào năm 623 A.D., các bộ tộc Bedouin chia rẻ và phân tán khắp các bán đảo Ả rập đã tập hợp lại vững chắc bằng niềm tin tôn giáo nhiệt thành để trở thành một quốc gia hùng mạnh. Trong vòng một thế kỷ, các lực lượng vũ trang dưới bóng ngọn cờ vàng xanh của đạo Hồi đã mở rộng vùng thống trị của ngôi sao và trăng lưỡi liềm Moslem vươn đến tận Ấn độ, qua Ba tư, Mesopotamia, và Bắc Phi sang tận Tây Ban Nha.

Điều quan trọng bậc nhất cho việc gìn giữ kho tàng văn minh nhân loại là thái độ năng nổ của người Ả rập khi họ thâu tóm sự uyên bác của nền văn minh Hi lạp và Ấn độ. Nhiều công trình Ấn Hi về y học, thiên văn, và toán học đã được chuyên cần dịch sang tiếng Ả rập và nhờ thế còn được lưu truyền, và sau này các học giả Âu châu dịch lại sang tiếng Latin và các ngôn ngữ khác. Nếu không nhờ công lao to lớn của các học giả Ả rập thì phần lớn các công trình khoa học Ấn Hy đã vĩnh viễn biệt tăm trong thời kì tăm tối Trung Cổ. Ngoài công lao vĩ đại giữ gìn tri thức nhân loại, người Ả rập còn có sự đóng góp của riêng mình, và độc đáo nhất là công trình của Omar Khayyan liên quan đến việc giải phương trình bậc 3 bằng phương pháp hình học.

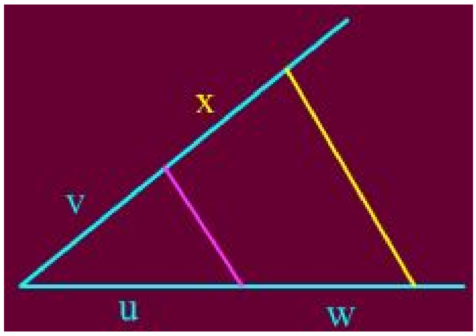
Omar Khayyan (1044-1123) là một thi sĩ, nhà thiên văn, và toán học Ba tư, sinh ra và học tập tại thành phố Naishapur thuộc Khorasan (đông bắc Iran ngày nay). Ông đã từng được yêu mến và ca tụng trong thế giới phương Tây qua những vầng thơ mỹ lệ trong quyển The Rubaiyat do Edward Fitzgerald chuyển ngữ. Trong thế giới khoa học, ông cũng được biết đến qua công trình cải tạo bộ lịch thêm chính xác, sự luận bàn của ông về tiên đề song song của Euclid cho thấy ý tưởng ông đi trước cả ý tưởng của Saccheri, ý tưởng mà sau này dẫn đến hình thành môn hình học phi Euclid, và đặc biệt là đóng góp của ông trong nền đại số Ả rập là việc tìm nghiệm dương của mọi phương trình bậc 3 bằng phương pháp hình học.

Hãy minh họa các bước giải của Omar Khayyan cho phương trình dưới đây:

$$x^3 + b^2 x + a^3 = cx^2$$

trong đó a, b, c, x là các độ dài. Omar phát biểu bài toán này như sau: "một lập phương, một cạnh nào đó và một số nào đó bằng một bình phương nào đó." Nói một cách hình học, bài toán này được phát biểu như sau: Cho các độ dài a, b, c, hãy dựng một đoạn thẳng x sao cho đẳng thức trên thỏa mãn. Mục tiêu là dựng độ dài x bằng thước và compa càng nhiều càng tốt. Chứ chỉ dùng thước và compa mà thôi thì thường không giải được. Tại một vài bước dựng, ta được phép vẽ các đường cônic hoàn toàn xác định nào đó.

Phép dựng cơ bản được dùng nhiều lần trong bài toán này là dựng đoạn tỉ lệ thứ tư với ba đoạn đã biết. Đây là bài toán cổ mà người Hi lạp xưa đã biết. Giả sử u, v, w là ba độ dài đã biết, hãy dựng độ dài x sao cho : u : v = w : x . Hình bên, tương tự như hình trang trước, là cách dựng độ dài x bằng thước và compa độ dài x cần tìm.



Bây giờ ta bắt tay giải hình học phương trình bậc 3 của Omar Khayyan nói trên: $x^3 + b^2 x + a^3 = cx^2$

Đầu tiên ta tìm đoạn z sao cho b : a = a : z bằng phép dựng đoạn tỉ lệ thứ tư đã nói.

Tiếp theo, lần nữa, dựng đoạn m sao cho: b : z = a : m.

Như vậy : $m = a^3/b^2$.

Bây giờ, xem hình dưới, dựng AB = m = a^3/b^2 và BC = c. Dựng nửa đường tròn đường kình AC. Đường vuông góc với AC tại B, cắt nửa đường tròn tại D.

Trên BD, lấy đoạn BE = b và qua E kẻ EF song song AC.

Bằng cách dựng đoạn tỉ lệ thứ 4, ta dựng G trên BC sao cho ED : BE = AB : BG và vẽ hình chữ nhật DBGH.

Qua H vẽ hyperbol vuông góc có EF và ED là hai tiệm cận (tức đối với hệ trục mà EF và ED là trục hoành và trục tung thì phương trình của hyperbol là xy = hằng số).

Hyperbol này cắt nửa đường tròn tại J, và qua J vẽ đường song song với DE, cắt EF tại K và BC tại L.

Gọi M là giao điểm của GH và EF. Thế thì:

1. Vì J và H trên hyperbol nên : EK. KJ = EM. MH
2. Vì ED : BE = AB : BG, ta có : BG. ED = BE. AB
3. Do đó, từ 1 và 2: EK. KJ = EM. MH = BG. ED = BE. AB
4. Lại có : BL. LJ = EK. (BE + KJ) = EK. BE + EK. KJ

= EK. BE + AB . BE (theo 3)

= BE. (EK + AB) = BE. AL

=> BL^2. LJ^2 = BE^2. AL^2.

5. Mà LJ^2 = AL. LC (hệ thức lượng trong tam giác vuông)
6. Do đó, từ 4 và 5: BE^2. AL = BL^2. LC

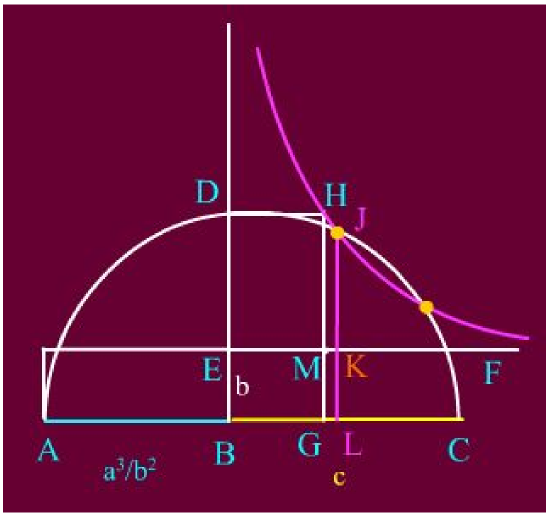
<=> BE^2.(BL + AB) = BL^2. (BC - BL)

7. Đặt BE = b, AB = a^3/b^2 và BC = c vào đẳng thức 6, ta được :

$b^2(BL + a^3/b^2) = BL^2 (c - BL)$

8. Khai triển và thu gọn, ta được:

$BL^3 + b^2. BL + a^3 = c. BL^2$



và do đó BL = x là một nghiệm của phương trình đã cho. Vì hyperbol cắt nửa đường tròn tại hai điểm L nên phương trình này có 2 nghiệm dương.

Phải công nhận là phương pháp của Omar thật tinh tế và khéo léo. Nhận xét rằng ta có thể vẽ hyperbol bằng phương pháp vẽ từng điểm một và điểm này cũng vẽ bằng phương pháp đoạn tỉ lệ thứ tư. Thật vậy nếu gọi N là một điểm bất kì trên hyperbol qua H nói trên, gọi P là hình chiếu của N lên EF thì:

EM. MH = EN. NP <=> EN : EM = MH : NP,

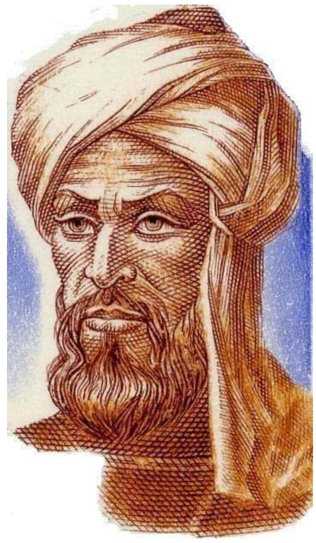
và NP chính là đoạn tỉ lệ thứ tư của ba đoạn đã biết là EN, EM và MH. Bằng cách này ta có thể vẽ nhiều điểm của hyperbol và nối lại thì được đường hyperbol liền lạc. Omar còn giải nhiều dạng phương trình bậc 3 khác bằng phương pháp tương tự.

Omar Khayyan mất tại Naishapur năm 1123. Một đệ tử của ông, Khwajah Nizami, kể rằng thời sinh tiền, trong những lần đàm đạo với thầy Omar ngoài vườn, thường nghe thầy tâm sự muốn phần mộ của mình sau này tọa lạc tại nơi nào mà gió đông về sẽ rắc những cánh hồng lả tả rơi lên mộ. Vài năm sau ngày thầy mất, người học trò cũ có dịp qua Naishapur, liền tìm đến thăm thầy. Y trông thấy ngôi mộ thầy nằm bên cạnh một khu vườn. Từ bờ tường, những cành hoa khoe sắc không ngừng rắc những cánh hoa lả tả lên phần mộ một vĩ nhân trong khi tấm mộ bia thì hoàn toàn bị che khuất.

15. Người đần độn

Quá trình gieo rắc và quảng bá hệ thống số - Ả rập - Ấn độ vào Tây Âu chủ yếu nhờ việc in ấn các sách ca ngợi và ủng hộ hệ thống chữ số mới.

Công trình số học sớm nhất của người Ả rập là công trình của AlKhowarizmi (825), mở đầu cho nhiều công trình của các tác giả Ả rập về sau. Những số học này chủ yếu là những qui luật tính toán theo kiểu Ấn, sử dụng các chữ số Ấn. Trong đó có phép thử đúng sai của phép tính bằng quy tắc chữ số 9 mà ai cũng học qua ở bậc tiểu học. Ngoài ra các thuật TOÁN giả sử để giải các bài toán cấp 1 mà không phải dùng đến phương pháp đại số như ta từng làm quen khi còn ở tiêu học. Căn bậc 2, bậc 3, phân số và quy tắc tam xuất cũng được giảng nghĩa thường xuyên. Cũng cần biết từ tên AlKhowarizmi, mà người Tây phương đặt ra thuật ngữ algorithm có nghĩa là thuật toán.



Trong các công trình gây ảnh hưởng đến việc quảng bá và sử dụng hệ thống chữ số Ả rập - Ấn, công trình quan trọng nhất là quyển sách có tên *Liber abaci* xuất hiện ở Ý năm 1202. Sự ra đời của quyển sách là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC mà chúng ta sẽ bàn đến sau đây.

Tác giả của Liber abaci là Leonardo Fibonacci (1175-1250), nhà toán học tài năng nhất của thời Trung Cổ, cũng được biết dưới tên Fibonaco ở thành phố Pisa. Ông sinh tại thành phố thương mại Pisa, nơi đó nghề nghiệp của cha ông liên quan đến thương mại. Nhiều công ty kinh doanh của Ý lúc đó sở hữu rất nhiều kho hàng dọc theo Địa Trung Hải, do đó khi cha ông đảm nhận chức vụ quản lí thuế, chàng thiếu niên Fibonacci có dịp đi cùng cha đến sống ở Bougie trên bờ Bắc Phi Châu. Công việc tính toán thuế khóa của cha đã gieo vào đầu óc Fibonacci sự yêu thích môn số học, và sau đó những lần đi đến các cảng Ả rãp và xuống tận Ai cập, Sicily, Hi lạp và Syria, đã mang lại cho ông nhiều cơ hội tiếp xúc với kỹ năng tính toán Ả rập. Hoàn toàn bị chinh phục bởi tính hơn hẳn của thuật tính toán theo hệ thống số Ả rập - Ấn độ, năm 1202, chỉ một thời gian ngắn sau khi về nhà, ông cho ra đời quyển *Liber abaci* lừng danh.

Bản in đầu tiên của *Liber abaci* không còn tồn tại, chỉ có bản in thứ hai năm 1228 là được lưu truyền đến chúng ta. Quyển sách đề cập đến số học và đại số, mặc dù có những nghiên cứu đôc lập, có thể thấy ảnh hưởng của các kiến thức đại số của AlKhowarizmi và Abu Kamil. Quyển sách minh học phong phú và đề cao mạnh mẽ những kí hiệu Ấn độ-Ả rập cùng những thuật toán đi kèm. Trong 15 chương của quyển sách là những giải thích cách đọc và viết các chữ số mới, thuật tính toán số nguyên và phân số, tính căn bậc 2, bậc 3, và cách giải các phương trình bậc 1, bậc 2. Các nghiệm âm và ảo không được đề cập và các phương trình xuất hiện dưới dạng các bài toán thực tế như trao đổi, chia phần, và đo lường hình học. Công trình cũng chứa một tuyển tập phong phú các bài toán, là kho tham khảo cho các tác giả đời sau. Tác dụng thấy ngay của công trình là ảnh hưởng của nó lên sự truyền bá hệ thống số mới.

Nói đến Fibonacci, ta thường nhắc đến bài toán nổi tiếng của ông được phát biểu dưới dạng sau:

"*Có bao nhiêu cặp thỏ được sinh ra từ một cặp thỏ đầu tiên sau một năm, biết rằng mỗi tháng mỗi cặp sinh ra được một cặp thỏ mới, và hai tháng sau khi sinh một cặp thỏ mới có thể bắt đầu sinh sản?*"

Không mấy khó khăn chúng ta có thể thấy ngay là số cặp thỏ sau tháng thứ 1, 2, . . . là số hạng của dãy số lừng lẫy mang tên ông: 1, 1, 2, 3, 5, . . ., x, y, x + y, . . .

Dãy số này có hai số hạng đầu là 1, kể từ số hạng thứ ba, mỗi số hạng là tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó. Dãy số này xuất hiện trong những tình huống ta không ngờ tới. Nó có mặt trong nghệ thuật, trong sự nhân giống đàn ong, sự phân bố của lá cây, và nó cũng xuất hiện đây đó trong toán học.

Lấy ví dụ về sự phân bố lá cây. Nếu chúng ta quan sát lá cây cuối cùng ở sát gốc một thân cây rồi đếm số lá cây mọc dọc theo thân cây, cho đến lá cây ngay phía trên lá đầu tiên. Ta sẽ thấy số lá cây này là số hạng của dãy số Fibonacci. Các số Fibonacci xuất hiện trong những bông hoa. Hầu hết các bông hoa có số cánh hoa là một trong các số: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 hoặc 89. Hoa loa kèn có 3 cánh, hoa mao lương vàng có 5 cánh, hoa phi yến thường có 8 cánh, hoa vạn cúc thọ có 13 cánh, hoa cúc tây có 21 cánh, hoa cúc thường có 34, hoặc 55 hoặc 89 cánh. Các số Fibonacci cũng xuất hiện trong các bông hoa hướng dương. Những nụ nhỏ sẽ kết thành hạt ở đầu bông hoa hướng dương được xếp thành hai tập các đường xoắn ốc: một tập cuộn theo chiều kim đồng hộ, còn tập kia cuộn ngược theo chiều kim đồng hồ. Số các đường xoắn ốc hướng thuận chiều kim đồng hồ thường là 34 còn ngược chiều kim đồng hồ là 55. Đôi khi các số này là 55 và 89, và thầm chí là 89 và 144.

Nếu chúng ta lập dãy số những tỉ số các số hạng liên tiếp của dãy Fibonacci , chúng ta được dãy số : 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13 . . . Ta có thể chứng minh dãy số này tiến đến số : $r = (\sqrt{5} - 1)/2$. Số này chính là tỉ số vàng mà chúng ta đã đề cập trong bài 5. Hình như tự nhiên cũng nỗ lực tiến đến tỉ số vàng.

Dãy số Fibonacci tìm thấy nhiều ứng dụng trong những nghiên cứu toán học. Ví dụ, trong thuật toán Euclidean tìm ước số chung lớn nhất của hai số dương, ta phải thực hiện một số phép chia liên tiếp. Ta tự hỏi có thể có một giới hạn nào của số các lần chia này hay không? Câu trả lời được Gabriel Lamé (1795-1870) cung cấp trong định lí sau: "Số các phép chia cần để tìm ước số chung lớn nhất của hai số dương thì không bao giờ lớn hơn năm lần số các chữ số của số nhỏ nhất." Ai ngờ việc chứng minh định lí này lại nhờ đến vài tính chất của dãy Fibonacci.

Những tài liệu về sự hiện diện cùng khắp của dãy số Fibonacci và tính chất của nó lớn lao một cách đáng kinh ngạc và không ngừng phát triển. Những hệ thức quan trọng gắn liền với dãy số hình như, tương tự như trong hình học tam giác, là vô tận. Đúng vậy, trong năm 1963, một nhóm các nhà nhiệt thành với dãy số Fibonacci đứng đầu bởi Tiến sĩ Verner Hoggatt thành lập Hội Fibinacci và bắt đầu xuất bản tạp chí từng quý

Fibonacci Tam Nguyệt San, chuyên nghiên cứu về Fibonacci và các dãy số liên hệ. Trong ba năm tồn tại đầu tiên, tạp chí này in gần 1000 trang nghiên cứu trong lãnh vực đặc biệt này.

Fibonacci còn viết thêm các tác phẩm khác ngoài *Liber abaci*. Năm 1220 xuất hiện *Hình học thực hành*, một tuyển tập lớn các kiến thức về hình học và lượng giác được viết khéo léo, nghiêm cẩn và độc đáo. Năm 1225, Fibonacci viết *Liber quadratorum*, một công trình rực rỡ và mới mẻ về giải tích vô định, mang ông lên tầm cao ngang với Diophantus và Fermat. Những công trình này hoàn toàn vượt qua khả năng của các học giả đương thời.

Tài năng xuất chúng của ông lọt vào mắt xanh của Hoàng đế Frederic II của vương quốc Sicily, người tài trợ cho nền học thuật. Kết quả là ông được mời tới hoàng cung để tham gia cuộc thi tài toán học. Ba bài toán do John của Palermo, một thành viên của đoàn tùy tùng nhà vua, đưa ra. Fibonacci giải được cả ba bài, khiến mọi người tâm phục, khẩu phục.

Bài toán thứ nhất là tìm số hữu tỉ x sao cho $x^2 + 5$ và $x^2 - 5$ mỗi số đều là bình phương của một số hữu tỉ. Fibonacci tìm ra x = 41/12, là một đáp số đúng vì $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$ và $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$. Lời giải sau đó xuất hiện trong quyển *Liber quadratorum*.

Bài toán thứ hai là giải phương trình bậc 3: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$

Fibonacci chứng minh rằng phương trình không thể có nghiệm vô tỉ có dạng $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, hay, nói một cách khác, không có nghiệm có thể dựng được bằng thước và compa. Sau đó ông tìm được một nghiệm gần đúng, viết theo cơ số thập phân là 1,3688081075, là một đáp số đúng đến 9 chữ số thập phân. Câu trả sau đó xuất hiện, mà không kèm lời giải, trong một công trình có tên Flos (nghĩa là Hoa) và đã gây thắc mắc không biết ông đã tìm ra nó như thế nào.

Bài toán thứ ba, cũng được ghi lại trong cuốn Flos, như sau: "Một xấp tiền gồm phần của ba người theo tỉ lệ : 1/2, 1/3, 1/6. Sau đó mỗi người lấy một phần từ xấp tiền đó và xấp tiền không còn đồng nào. Rồi người thứ nhất trả lại 1/2 số tiền đã lấy, người thứ ba trả lại 1/3, và người thứ ba 1/6. Khi tổng số tiền trả lại được chia đều cho ba người thì lạ thay họ lại được đúng số tiền đã chia lúc đầu, Hỏi số tiền lúc đầu và họ đã lấy ra mỗi người bao nhiêu?" Fibonacci giải như sau:

Gọi s là số tiền lúc đầu và 3x là toàn bộ số tiền hoàn lại. Trước khi mỗi người nhận được số tiền x, tức một phần ba số tiền trả lại, thì ba người lần lượt có s/2 - x , s/3 - x, s/6 - x. Vì đây là số tiền họ có sau khi đã trả lại 1/2, 1/3, 1/6 số tiền họ đã lấy trước, nên các số tiền đã lấy trước là 2(s/2 - x), (3/2)(s/3 - x), (6/5)(s/6 - x) . Vì tổng các số tiền này bằng s nên ta có phương trình:

2(s/2 - x), (3/2)(s/3 - x), (6/5)(s/6 - x) = s

Hay 7s = 47x, và bài toán có vô số nghiệm . Fibonacci chọn s = 47 và x = 7. Thế thì số tiền đã lấy ra từ xấp tiền là 33, 13, 1.

Fibonacci thường kí tên lên các công trình của mình là Leonardo Bigollo. Mà Bigollo có đến hai nghĩa: một là người du lịch hai là người đần độn. Khi kí tên như thế ắt hẳn Fibonacci muốn xưng mình là người đi đây đi đó nhiều, vì thật ra là như thế. Nhưng có người nói sở dĩ ông lấy biệt danh đó vì nhiều người đương thời cho ông là đần độn khi cứ quá say mê các chữ số Ấn-Ả rập. Và với biệt danh đó, ông muốn chứng tỏ với các người chỉ trích ông là một người đần độn có thể làm được những gì.

Tham khảo 1:

Tham khảo 2:

16. Một câu chuyện kỳ lạ và phi thường

Trong bài 14, chúng ta đã chứng kiến chàng thi sĩ- toán học Omar Khayyam giải phương trình bậc 3 bằng hình học. Trong bài này, chúng ta sẽ tìm hiểu làm thế nào, sau 500 năm, nhà toán học Ý cuối cùng đã tìm cách giải được phương trình bậc 3, và rồi chỉ một thời gian ngắn sau đó, phương trình bậc 4. Những thành tựu này đánh dấu những cột mốc ngoạn mục trong toán sử và xứng đáng vinh danh là HAI THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC, thời khắc này nối gót theo thời khắc kia, và liên quan đến các nhân vật độc đáo trong toán học.

Khoảng 1515, Scipione del Ferro (1465-1526), một giáo sư toán tại Đại học Bologna, giải được thành công phương trình bậc ba khuyết : $x^3 + mx = n$, chắc chắn dựa vào các công trình của người Ả rập đi trước. Ông ta không công bố thành tựu này mà chỉ nói cho người học trò là Antonio Maria Fior, khoảng 1535.

Tartaglia

Nicolo Fontana (1499-1557), có biệt danh là Tartaglia (người nói lắp) vì hồi nhỏ bị tai nạn khiến khả năng nói của ông bị tổn thương, tuyên bố đã giải được phương trình bậc ba khuyết bậc 1 : $x^3 + px^2 = q$. Nghỉ rằng đây chỉ là trò khoác loác, Fior thách đấu công khai với Tartaglia trong một thời gian ấn định trước sẽ giải các phương trình bậc ba do hai người đưa ra. Chấp nhận cuộc thách đấu, Tartaglia đã nổ lực hết sức mình và tìm được cách giải phương trình khuyết bậc 2 vài ngày trước khi cuộc thách đấu bắt đầu. Thế là bước vào trận, Tartaglia giải được cả hai dạng phương trình bậc 3, và thắng áp đảo vì đối thủ Fior chỉ giải được một dạng.

Cardano

Sau đó, Giro Cardano (1501-1576), một thiên tài độc đáo ở Milan, dạy toán và làm nghề thuốc ở Milan, sau khi hứa hẹn giữ bí mật, đã dụ được Tartaglia trao chìa khoá cách giải phương trình bậc 3. Năm 1545, Cardano cho in tác phẩm *Ars magna* ở Nuremberg, Đức, một công trình vĩ đại bằng tiếng Latin, trong đó ông gắn vào đó viên ngọc quí là phương pháp giải phương trình bậc 3 của Tartaglia. Tartaglia phản đối quyết liệt nhưng lời phàn nàn của ông đã bị Ferrari (1522-1565), một học trò có năng lực nhất của Cardano đáp trả. Y lí giải rằng Cardano đã nhận thông tin này từ del Ferro qua một trung gian thứ ba, và kết tội chính Tartaglia mới là kẻ đạo văn. Tiếp theo đó là những chuỗi tranh cãi gay gắt mà Tartaglia may mắn lắm mới thoát khỏi được vô sự.

Những tình tiết trong câu chuyện có nhiều kịch bản khác nhau, thật khó cho những kẻ hậu sinh như chúng ta phân biệt đâu là thật, đâu là giả.

Cách giải phương trình bậc 3: $x^3 + mx = n$ được trình bày bởi Cardano trong quyển Ars magna như sau: xét đẳng thức:

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$$

Nếu ta chọn a và b sao cho : $3ab = m$ và $a^3 - b^3 = n$ thế thì $x = a - b$ là nghiệm của phương trình. Giải hệ 2 phương trình trên, ta được a và b:

$$a = \sqrt[3]{(n/2)+(n/2)^2+(m/3)^3} \ (n/2)$$

$$b = \sqrt[3]{-(n/2)+(n/2)^2+(m/3)^3}$$

và x sau đó được xác định bởi cái gọi là công thức Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{(n/2)+(n/2)^2+(m/3)^3} - \sqrt[3]{-(n/2)+(n/2)^2+(m/3)^3}$$

Để giải phương trình bậc 3 tổng quát: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ta dùng phép đổi ẩn phụ : $x = z - b/3a$, phương trình bậc 3 tổng quát có thể đưa về dạng: $z^3 + mz = n$, và như thế mọi phương trình bậc 3 đều giải được.

Không lâu sau khi cách giải phương trình bậc 3 đã được khám phá, phương pháp giải phương trình bậc 4 tổng quát cũng được tìm ra. Năm 1540, nhà toán học Ý da Coi gởi cho Cardano bài toán sau:

"*Chia 10 thành ba phần sao cho ba phần ấy tỉ lệ và tích của hai số hạng đầu là 6.*"

Nếu gọi ba phần là a, b, c , thì ta có hệ:

$$a + b + c = 10,\ ac = b^2,\ ab = 6.$$

Bằng cách khử a và c, ta được phương trình tính b là phương trình bậc 4:

$$b^4 + 6b^2 + 36 = 60b$$

Cardano không thể giải phương trình này, nhưng học trò ông là Ferrari giải được, và qua đó giải được mọi phương trình bậc 4 có dạng: $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, một dạng mà mọi phương trình bậc 4 đều có thể được đưa về qua phép đổi biến bậc 1. Phương trình trên tương đương với :

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + p)^2 = px^2 - qx - r + p^2$$

Suy ra, với mọi y : $(x^2 + p + y)^2 = px^2 - qx - r + p^2 + 2y(x^2 + p) + y^2$

$$= (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2)$$

Bây giờ ta chọn y sao cho vế phải của phương trình là một bình phương đúng. Trường hợp này xãy ra khi :

$$\Delta = q^2 - 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) - q^2 = 0$$

Đây là phương trình bậc 3 ẩn y mà ta đã biết cách giải. Tìm được y rồi thì việc tìm nghiệm x từ phương trình trên chỉ là việc khai phương một số.

Cardano cũng không ngại đem phương pháp giải của Ferrari vào quyển Ars magna in năm 1545.

Còn có nhiều cách giải phương trình bậc3, bậc 4 được phổ biến sau đó. Trong phần cuối bài này ta sẽ trình bày cách giải của nhà toán học Francois Viete (1540-1603) được in sau khi ông mất và cách giải phương trình bậc 4 cho bởi Rene' Descartes (1596-1650) được công bố năm 1637. Tiếp theo chúng ta dành chút thời gian cho hai nhân vật chính: Cardano và Tartaglia, tác giả của phép giải phương trình bậc 3.

Cardano, một trong các nhân vật phi thường nhất trong lịch sử toán học, sinh tại Pavia năm 1501, là con ngoại hôn của một luật gia. Ông lớn lên trở thành một người với nhiều đam mê xung khắc, bắt đầu là một thầy thuốc, đồng thời nghiên cứu, dạy và viết toán song song. Sau một chuyến đi đến Scotland, ông giữ được những chức vị quan trọng ở đại học Pavia và Bologna. Như một nhà chiêm tinh, ông soạn những lá số tử vi, và có một lần bị bỏ tù vì tội bổ báng thành thần khi dám cho in một lá số tử vi của Chuá Jesus. Sau khi từ nhiệm ở Bologna, ông chuyển đến Rome và trở thành một nhà chiêm tinh lỗi lạc, và kỳ lạ là người ta quên việc ông đã có lần bị phạt tù vì tội phạm thánh, lại cử ông làm chiêm tinh bên cạnh giáo hoàng. Ông mất tại Rome năm 1576, người ta bảo là ông tự tử cho đúng với ngày giờ mà ông đã công bố trong lá số tử vi của mình tự soạn.

Nhiều giai thoại kể về tính khí dữ tợn của ông, như có lần trong một cơn nóng giận, ông cắt đứt hai tai của đứa con trai chỉ vì nó làm ồn quá. Ông có nhiều kẻ thù, thành ra có thể những chuyện trên đã được thêu dệt nên. Nhưng không thể không nói ông là người thâm hiểm, vì chính ông đã tự khai như vậy trong quyển tự thuật của mình.

Là một người giỏi giang về nhiều mặt, Cardano đã viết nhiều tác phẩm về số học, thiên văn, vật lí, y học, và những đề tài khác. Công trình lớn lao nhất của ông là *Ars magna*, là tác phẩm đầu tiên viết bằng Latin chuyên về đại số. Trong đó đáng nói là ông có đề cập đến nghiệm âm và cả những phép tính về số ảo. Ông cũng trình bày mặc dù thô sơ việc tìm nghiệm gần đúng của một phương trình đa thức. Ông cũng biết chút ít về qui tắc xét dấu một đa thức mà sau này Descartes sẽ hoàn thiện. Là một người mê cờ bạc, ông cũng viết cả một cẩm nang đánh bạc, trong đó hé lộ đôi chút những ý tưởng về xác suất.

Còn Tartaglia thì trải qua một quảng đời tuổi thơ nghèo khổ. Ông sinh tại Brescia khoảng 1499 và khi người Pháp chiếm Brescia ông đã là một thiếu niên. Để thoát khỏi những cuộc chém giết dã man của lính Pháp, ông và cha ông, một người đưa thư, đã trốn chạy vào một nhà thờ cùng với một số người khác. Lính Pháp đuổi theo, và một cuộc tàn sát xảy ra ngay bên trong chốn thiêng liệng. Người cha bị chém chết, còn chàng thiếu niên thì bị chém ngang mặt, cắt đứt miệng và lưỡi. Khi người mẹ tìm đến thì còn kịp cứu con trai mình trong khi người chồng đã chết. Không thuốc men, không thầy thuôc, bà chỉ cỏn biết bắt chước thói quen chữa thương của các loài động vật là liếm vết thương của đứa con trai. Vết thương ở lưỡi khiến cho ông phải tật nói lắp, từ đó có biệt danh Tartaglia, có nghĩa là người nói lắp.

Mẹ ông chỉ gom góp đủ tiền để gởi ông đi học được 15 ngày. Lợi dụng cơ hội này, ông xoáy một quyển vở đánh vần và sau đó tự học cách đọc và viết. Thiếu phương tiện để mua dụng cụ dạy học, người ta kể rằng ông thường đến nghĩa địa, lấy bia mộ làm bảng viết. Những năm sau, ông kiếm sống bằng nghề dạy khoa học và toán trong những thành phố khác nhau của Ý. Ông mất năm 1557 tại Venice.

Tartaglia là một nhà toán học thiên tài. Ngoài công trình giải phương trình bậc 3, ông có lẽ là người đầu tiên áp dụng toán học trong khoa pháo binh. Ông viết một tác phẩm thường được coi là quyển số học tốt nhất của Ý ở thế kỉ thứ 16, trong đó trình bày đầy đủ các phép tính số và tính thuế thương mải. Ông cũng cho xuất bản những công trình của Euclid và Archimedes.

Các cách giải khác của phương trình bậc 3 và 4 đã được các nhà toán học đóng góp về sau này. Như Francois Viete, trong bản in năm 1615 sau khi ông mất, đã trình bày cách giải đẹp đẽ phương trình bậc 3 như sau:

$$x^3 + 3ax = 2b$$

một dạng mà bất cứ phương trình bậc 3 tổng quát nào cũng có thể đưa về.

Đặt: x = a/y - y phương trình thành :

$$y^6 + 2by^3 = a3$$

đây là phương trình bậc 2 theo y^3. Giải ta tìm được y^3, suy ra y, từ đó tìm được x. Cách giải phương trình bậc 4 của Viete tương tư như của Ferrari. xét phương trình bậc 4 khuyết sau :

$$x^4 + a x^2 + bx = c$$

một dạng mà mọi phương trình bậc 4 đều có thể đưa về. Phương trình viết thành:

$$x^4 = c - a x^2 - bx$$

Cộng hai vế cho $x^2 y^2 + y^4/4$, ta được :

$$(x^2 + y^2/2)^2 = (y^2 - a)x^2 - bx + (y^4/4 + c)$$

Bây giờ chọn y sao cho vế phải là một bình phương đúng, điều kiện là:

$$\Delta = b^2 - 4(y^2 - a) (y^4/4 + c)$$

$$\Leftrightarrow y^6 - ay^4 + 4cy^2 = 4ac + b^2$$

là phương trình bậc 3 theo y^2 mà ta đã biết cách giải. Tìm được y ta suy ra x một cách dễ dàng bằng phép khai phương.

Cách giải của Descartes năm 1637 của phương trình bậc 4 khuyết:

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0$$

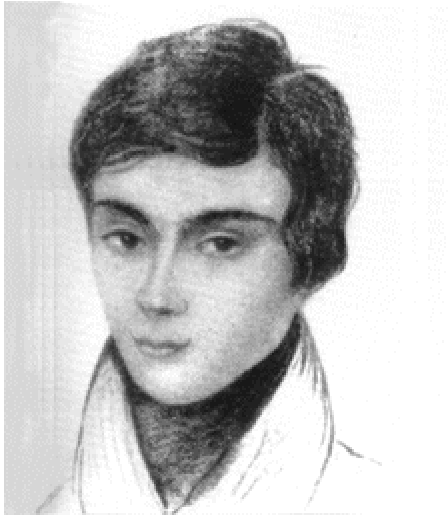
là dùng phương pháp hệ số bất định. Cho vế trái của phương trình bằng với tích:

$$(x^2 + kx + h)(x^2 - kx + m)$$

Bằng cách khai triển và đồng nhất các hệ số, ta được hệ 3 phương trình theo k, h, m. Khử h và m từ ba phương trình này, ta được phương trình bậc 6 theo k, nhưng cũng là phương trình bậc 3 theo k^2. Do đó việc giải phương trình bậc 4 đưa về việc giải phương trình bậc 3 liên kết với nó.

Vì việc giải phương trình bậc 3 rút ra từ việc giải phương trình bậc 2, rồi sau đó việc giải phương trình bậc 4 lại nhờ vào việc phương trình bậc 3, do đó, Euler, khoảng năm 1750, lao vào tìm cách giải phương trình bậc 5 từ một phương trình bậc 4, nhưng ông đã thất bại. Ba mươi năm sau, Lagrange cũng cùng chung cảnh ngộ. Một thầy thuốc người Ý là Paolo Ruffini (1765-1822) đã thử nhiều lần, nhưng chưa hoàn tất, phép chứng minh một sự kiện mà giờ đây đã là một định lí, rằng những nghiệm của phương trình bậc 5 hoặc cao hơn không thể biểu diễn được bằng các biểu thức vô tỉ của các hệ số của phương trình . Chân lí vĩ đại này đã được chứng minh một cách độc lập sau này, năm 1824, bởi nhà toán học Na Uy nổi tiếng là Niels Henrik Abel (1802-1829). Còn Évariste Galois (1811-1832), tử thương trong một vụ đọ súng tay đôi khi ông chỉ mới 21 tuổi , để lại một di cảo trong đó có công trình nghiên cứu về điều kiện để một phương trình đại số có thể giải được bằng các biểu thức căn. Nhưng chuyện này thuộc về MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC của tương lai.


Abel


Galois

18. Kích thích của khoa học

Thần Antaeus là con trai khổng lồ của Neptune (Thần Biển) và Ge (nữ thần đất), và sức mạnh của y là vô địch chừng nào mà y còn tiếp xúc với Mẹ Đất. Những người lạ vừa mới đến xứ sở của y bắt buộc phải vật lộn một sống một chết với y, và tình cờ một ngày kia Hercules và Antaeus so tài nhau. Nhưng Hercules, biết yếu điểm của Antaeus, nên nhấc bổng y khỏi mặt đất và giết y khi y ở trên không .

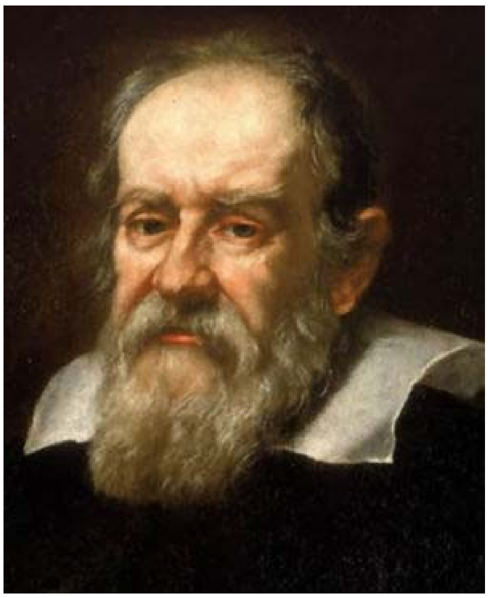
Có một ngụ ngôn dành cho các nhà toán học. Cũng giống như Antaeus sinh ra và nuôi dưỡng bởi Mẹ Đất, lịch sử đã chỉ chúng ta rằng mọi ngành Toán học có ý nghĩa và trường tồn đều sinh ra và nuôi dưỡng bởi thế giới thực tế . Cũng như Antaeus, chừng nào mà toán học còn tiếp xúc với thực tại, nó vẫn còn mạnh mẽ. Nhưng nếu ta tách nó khỏi mặt đất vững chải nơi nó sinh ra để mang nó vào khoảng không yếu ớt của trừu tượng thuần túy, nó có thể sẽ yếu đi. Cần phải thỉnh thoảng trả nó về mặt đất để nó hồi phục sức mạnh cội nguồn.

Sự hồi xuân như thế của toán học đã xảy ra trong thế kỉ thứ 17, theo sau các khám phá của hai nhà toán học- khoa học nổi tiếng - Galileo (1564-1642) và Kepler (1554-1630). Galileo, chưa đầy 25 tuổi, sau một chuỗi thí nghiệm, đã khám phá một số sự kiện căn bản liên quan đến chuyển động của vật thể trong trọng trường của trái đất, và Kepler, khoảng 1619, đã tìm ra ba định luật nổi tiếng về quỹ đạo của hành tinh. Những thành tựu này đã ảnh hưởng đến sự phát triển của toán học về sau này, xứng đáng được vinh danh là hai THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC. Sự khám phá của Galileo đưa đến sự hình thành khoa học mới về động lực học và của Kepler đến cơ học vũ trụ hiện đại; và mỗi một nghiên cứu bày, ngược lại, đòi hỏi một công cụ toán học mới- toán vi tích phân- để phát triển vì chỉ có công cụ mới này mới giải quyết được các bài toán về biến thiên, thông lượng và chuyển động.

Một dạng toán mới được hình thành. Toán cũ thì thụ động và tĩnh trong khi toán mới năng động và tràn nhựa sống, toán cũ có thể ví như một bức ảnh còn toán mới là đoạn phim. Toán cũ đối với toán mới giống như ngành giải phẫu đối với ngành sinh lí học. Hơn nữa, trong khi toán cũ chỉ đề cập đến những đối tượng cố định và hữu hạn thì toán mới ôm lấy những chuyển động và cái vô hạn.

Galileo sinh năm 1564 tại Pisa là con trai của một quí tộc Florentine nghèo khó. Sau bước đầu học y không mấy thích thú, Galileo được cha cho phép đổi ngành học sang khoa học và toán học, lãnh vực ông có thiên hướng bẩm sinh.

Trong khi còn là sinh viên y khoa tại Đại học Pisa, ông đã phát hiện một hiện tượng nổi tiếng trong lịch sử là chiếc đèn treo khổng lồ trong nhà thờ dao động tới lui với một chu kỳ độc lập với kích thước cung dao động (sự kiện càng đúng khi biên độ dao động càng nhỏ). Sau đó ông chứng minh rằng chu kì của quả lắc cũng độc lập với trọng lượng quả lắc. Khi được 25 tuổi, ông được nhận làm giáo sư toán tại Đại học Pisa. Chình trong thời gian này, ông đã tiến hành thí nghiệm tại tháp nghiêng Pisa, để chứng tỏ

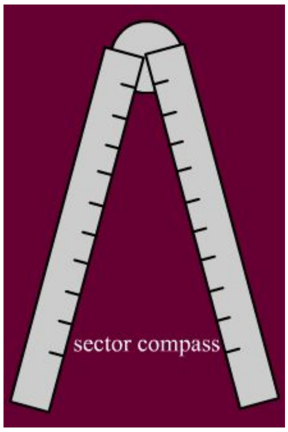


Galileo

rằng, trái với lời dạy của nhà đại hiền triết thời cổ Aristotle, là vật thể nặng không rơi nhanh hơn vật thể nhẹ. Bằng cách cho các vật thể lăn xuống một dốc nghiêng, ông tìm ra định luật là quảng đường đi được tỉ lệ với bình phương thời gian đi, theo công thức thân quen $s = (1/2)gt^2$.

Những xung đột nội bộ phiền toái khiến ông phải rời bỏ ghế giảng dạy năm 1591, năm sau ông nhận chức danh giáo sư toán tại Đại học Paduia, nơi đó không khí giảng dạy nồng ấm và thân thiện hơn.

Tại Padua, trong suốt 18 năm, ông tiến hành nhiều cuộc thí nghiệm và giảng dạy, tiếng tăm lan rộng. Trong thời gian này khoảng 1607, ông nghe nói có một thợ làm kính đã sáng chế được một kình viễn vọng, thế là ông bắt tay từ làm lấy một kính cho riêng mình, có độ phóng đại gấp 30 lần. Qua kính này, ông quan sát thấy những vết đen trên mặt trời (trái với lời xác quyết của Aristotle là mặt trời không có tì vết), nhìn thấy núi trên mặt trăng, và theo dõi được các tuần của sao Kim, vòng sáng quanh Thổ Tinh và bốn vệ tinh sáng chói của Mộc Tinh (tất cả ba phát hiện này càng làm người ta tin thêm vào thuyết thái dương hệ của Copernic). Sự khám phá của Galileo gây làn sóng chống đối tù Nhà Thờ, và cuối cùng năm 1633, ông bị giải ra trước tòa án Dị Giáo và bị cưỡng bách phải chối bỏ mọi khám phá khoa học của mình. Vài năm sau nhà khoa học vĩ đại này trở nên mù lòa. Ông mất, trong khi bị quản thúc tại nhà, vào năm 1642, năm Isaac Newton ra đời.



Ta mang ơn Galileo tinh thần hiện đại coi khoa học là mối liên hệ hài hòa giữa thực nghiệm và lý thuyết. Ông không những đã thành lập môn cơ học của vật thể chuyển động tự do, mà còn tạo ra nền tảng của động lực học, những nền tảng mà sau này Newton có thể xây dựng nên khoa học trên nền tảng toán học. Galileo là người đầu tiên biết rằng quỹ đạo của vật thể trong chân không là một parabol, và ông cũng nghiên cứu các định luật về momen. Ông sáng chế kình hiển vi hiện đại đầu tiên. Ngay từ năm 1597, ông đã hoàn thiện compa quạt (sector compass), một dụng cụ đơn giản đã phổ biến rộng rãi hơn 200 năm.

Galileo viết bằng tiếng Ý hai luận thuyết nổi danh, một về thiên văn học và một về vật lí. Tựa là *Hai Hệ Thống Chính Yếu* (1632) viết về công trạng của Ptolemy và Copernic khi nói về thái dương hệ, và *Hai Ngành Khoa Học Mới* (1638), nghiên cứu về động lực học và sức chịu đựng của vật liệu.

Mỗi tác phẩm được trình bày dưới dạng đối thoại giữa ba người: Salviati (một học giả uyên thâm), Sagredo (một người thường thông minh), và Simplicio (người theo thuyết Aristotle chính thống). Chính vì quyển thứ nhất mà ông bị đem ra toà phán xét và bị quản thúc; quyển thứ hai in ở Leyden, được viết trong thời gian ông bị giam cầm. Trong tác phẩm này, ông có nêu vài tính chất của những số vô cùng nhỏ và vô cùng lớn, ý tưởng so sánh các số vô cực mà sau này Cantor thế kỉ 19 đã phát triển trong lý thuyết tập hợp và những số vô hạn.

Có thể Galileo đã rất ganh tỵ khi nghe về những phát hiện cùng thời của Kepler, bởi vì mặc dù Kepler đã công cố ba định luật này ngay từ năm 1619, Galileo mù tịt về chúng.

Kepler sinh tại Stuttgard, Đức, năm 1571 và bắt đầu việc học tại Đại học Tubingen với ước muốn trở thành một mục sư tin lành. Cũng như Galileo, ông thấy việc chọn nghề đầu tiên không thể thỏa mãn đam mê khoa học, nhất là thiên văn học, và vì thế ông thay đổi kế hoạch đời mình.

Năm 1594, khi vừa độ 20, ông nhận chân trợ giảng tại Đại học Gratz ở Áo. Năm năm sau ông trở thành phụ tá cho nhà thiên văn Thụy Điển lừng danh Tycho Brahe, ông này đã chuyển về Prague để phục vụ dưới trướng Kaiser Rudolph II như một nhà thiên văn hoàng gia. Năm 1601, Brahe đột ngột qua đời, và Kepler được thừa hưởng chức vị của thầy đồng thời cả kho tài liệu ghi dữ kiện về vị trí của các hành tinh khi chúng chuyển động trên bầu trời. Với sự kiên trì không ai sánh nổi, ông đã lục lọi trong kho dữ kiện này để suy ngẫm và rút ra qui luật chuyển động của các hành tinh.

Người ta thường nói rằng phàm làm việc gì dù khó khăn đến mấy nếu ta cứ kiên trì và quyết tâm không ngừng nghĩ thì cũng có ngày thành tựu. Lấy lời của Edison nói về sự phát minh là một phần trăm cảm hứng còn đến 99 phần trăm là mồ hôi, ta có thể nói giải toán là một phần trăm tưởng tượng và đến 99 phần trăm là kiên trì.

Có lẽ không nơi đâu trong lịch sử khoa học, điều này được minh chứng rõ ràng như trong trường hợp của Kepler khi ông nhẫn nại và kiên trì không mệt mỏi và không thể tin được trên con đường đi tìm lời giải cho bài toán chuyển động của các hình tinh quanh mặt trời. Hoàn toàn bị thuyết phục bởi lý thuyết của Copernic khi cho rằng các hành tinh đi trên những quỹ đạo quanh tâm mặt trời, Kepler cố tìm ra bản chất và vị trí của các quỹ đạo này và cách thức mà các hành tinh di chuyển trên quỹ đạo. Với các kho dữ kiện khổng lồ của Brahe để lại, vấn đề là phải tìm ra một loại chuyển động ăn khớp với các dữ kiện quan sát được của Brahe. Ông tin cậy các dữ liệu của thầy để lại đến nổi bất cứ lời giải nào chỉ xê xích chút ít đến chúng đều bị ông loại bỏ.

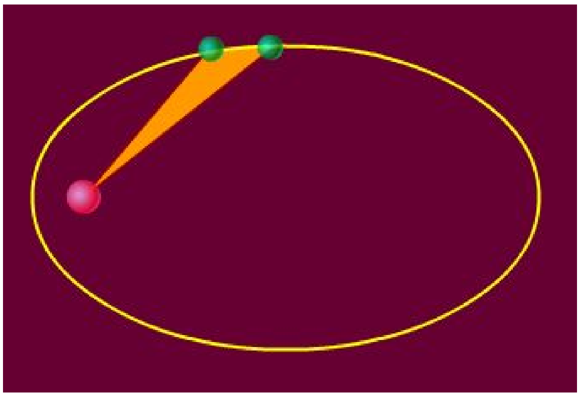
Trước tiên bằng trí tưởng tượng, Kepler dự đoạn một lời giải tin cậy được, rồi sau bằng tính kiên trì vô lượng ông trải qua hàng núi phép tính toán tẻ nhạt để xác nhận dự đoán này là chân lí hay ngụy lí. Ông đã thử hàng trăm dư đoán và thất bại rồi tiếp tục thử và lại tính và tính với lòng nhiệt thành không hề suy giảm và sự kiên nhẫn vô tiền khoáng hậu trong nhiều năm liền. Cuối cùng ông giải được bài toán của mình, dưới dạng ba định luật nổi tiếng về chuyển động của các hành tinh, hai định lí đầu tiên tìm thấy trong năm 1609, và 10 năm sau là định lí thứ ba.

I. Các hành tinh chuyển động quanh mặt trời theo quỹ đạo là các đường êlip mà mặt trời là một tiêu điểm .

II. Bán kính vectơ nối mặt trời và hành tinh quét một diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau.

III. Bình phương thời gian mà hành tinh đi một vòng quỹ đạo tỉ lệ thuận với lập phương của nửa

độ dài trục lớn của quỹ đạo.



Sự khám phá thực nghiệm của các định luật này dựa trên đống dữ liệu của Brahe là một trong những suy diễn đáng nể nhất trong khoa học. Với niềm hãnh diện xứng đáng, Kepler đã mở đầu quyển *Sự Hài Hòa của các Thế Giới* năm 1619 bằng những vầng thơ vỡ òa như thế này:

Tôi đang viết một quyển sách cho người đương thời hay- có sao đâu - cho người hậu thế. Có thể quyển sách này sẽ đợi 100 năm để có người đọc đến. Có sá gì vì Thượng Đế há chẳng đợi đến 6000 năm mới có người quan sát hệ thống của Người.

Định luật chuyển động hành tinh của Kepler là dấu ấn trong lịch sử thiên văn và toán học, bởi vì trong nỗ lực để chứng minh chúng, Newton phải vận dụng đến cơ học vũ trụ hiện đại. Điều thú vị là 1800 năm sau khi người Hi lạp phát hiện ra thiết diện cônic giờ đây nó đã được ứng dụng một cách vi diệu. Người ta không thể hiểu khi nào một kiến thức toán học trừu tượng lại có thể được ứng dụng trong thực tế vào một thời điểm không ngờ đến.

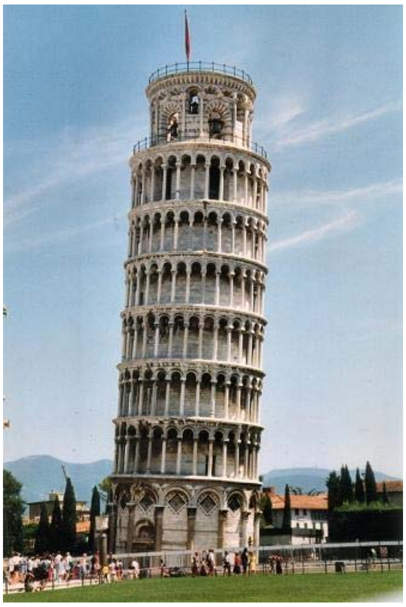
Để tính được diện tích trong định luật thứ hai, Kepler phải thực hiện các dạng thô sơ của phép tính tích phân, khiến ông có thể coi là người tiên phong của môn toán này. Trong quyển *Hình Học Khối Về Thùng Rượu Vang* (1615), ông áp dụng các phép tính tích phân thô sơ để tìm ra thể tích của 93 khối tròn xoay khác nhau tạo bởi các cung cônic khi quay quanh trục của chúng. Trong số các khối này có hình xuyến và hai hình mà ông gọi hình quả táo và quả chanh. Sở dĩ ông thích thú về vấn đề này là vì ông quan sát cách đo nhọc nhằn của những người thợ làm rượu vang. Có thể Cavalieri đã bị ảnh hưởng bởi công việc này của Kepler khi ông nâng phép tính vi tích phân lên một tầm cao và tinh tế trong phương pháp bất khả phân, mà ta sẽ bàn đến trong bài sau.

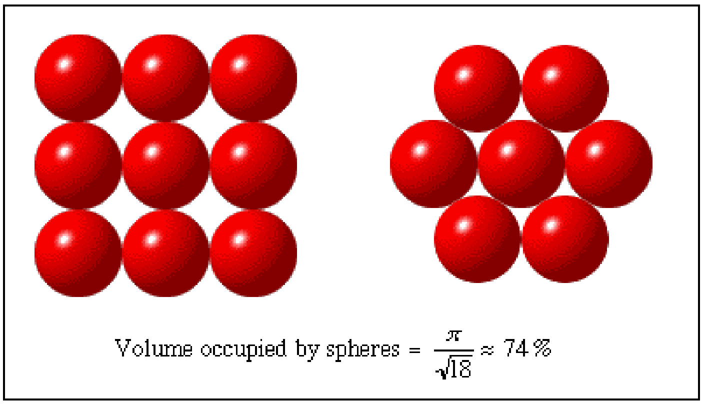
Kepler cũng là người giới thiệu danh từ "tiêu điểm" cho các đường cônic. Ông tính chu vi của elip bằng công thức $\pi(a + b)$ trong đó a và b là độ dài nửa trục lớn và trục nhỏ. Ông cũng quan niệm đường thẳng có thể coi là một đường khép kín ở vô cực, rằng hai đường song song sẽ cắt nhau vô cực và rằng parabol có thể coi như trường hợp đặc biệt của elip hoặc hyperbol trong đó một tiêu điểm của nó tiến ra vô cực. Những ý tưởng này thật là cách mạng và được các nhà hình học về sau phát triển. Ông còn được biết đến qua cái gọi là bài toán của Kepler là làm cách nào nén chặt một không gian bằng những quả cầu có kích cở bằng nhau sao cho khoảng trống giữa chúng là ít nhất. Kepler ức đoạn là mật độ nén chặt không thể hơn $\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 74\%$. Bài toán này chưa ai chứng minh được là sai hay đúng.

Thành tựu của Kepler là như thế nhưng cuộc đời riêng của ông là một chuỗi những bất hạnh trần gian. Khi mới bốn tuổi ông đã bị bệnh đậu mùa khiến hai mắt bị tổn thương nhiều. Ngoài sức khoẻ không khi nào tốt, tuổi trẻ của ông không vui vẻ chút nào , cuộc hôn nhân của ông là một nguồn đau khổ; đứa con trai mà ông yêu quí chết vì đậu mùa; vợ ông hóa điên mà chết; ông bị trục xuất khỏi Đại học Gratz khi thành phố rơi vào tay người Thiên Chúa Giáo; mẹ ông bị kết tội và bị tống vào tù vì bị ghép là phù thủy và ông phải trải qua một năm trời cố cứu bà thoát khỏi phòng hành hình một cách tuyệt vọng. Bản thân ông cũng suýt bị kết tội dị giáo và lương hướng của ông luôn chậm trễ. Người ta còn nói rằng cuộc hôn nhân thứ hai của ông còn tệ hại hơn nữa, mặc dù ông đã đối chiếu và phân tích cẩn thận những ưu khuyết điểm của 11 cô gái trước khi chọn phải người sai lầm. Ông phải tăng thêm thu nhập bằng cách hành nghề chiêm tinh, và ông mất trong một cơn sốt vào năm 1630 vào năm 59 tuổi khi ông trên đường đi lãnh một món tiền lương quá hạn.

Tham khảo 1: Galileo và tháp nghiêng Pisa

Tham khảo 2: Ức đoán của Kepler





20. Kỹ thuật biến đổi-giải-đảo ngược

Một trong những phương pháp hiệu quả nhất thường được các nhà toán học sử dụng được biết dưới tên: *kỹ thuật biến đổi-giải-đảo ngược*. Tinh túy của ý tưởng này là như sau. Để giải một bài toán khó, ta biến đổi nó thành một bài TOÁN tương đương nhưng dễ hơn, sau đó giải bài toán đơn giản này, và rồi đảo ngược tiến trình biến đổi hóa để được lời giải của bài TOÁN ban đầu.

Giả sử một người nào đó hỏi ta một câu hỏi bằng tiếng Pháp và chúng ta không thông thạo ngôn ngử đó. Trước tiên chúng ta sẽ biến đổi câu hỏi gốc thành một câu hỏi tương đương bằng tiếng Việt, ngôn ngữ mà ta quen thuộc. Tiếp sau chúng ta giải câu hỏi này bằng tiếng Việt. Cuối cùng ta đảo ngược lời giải từ Việt sang Pháp, và như thế là đã giải được câu hỏi gốc.

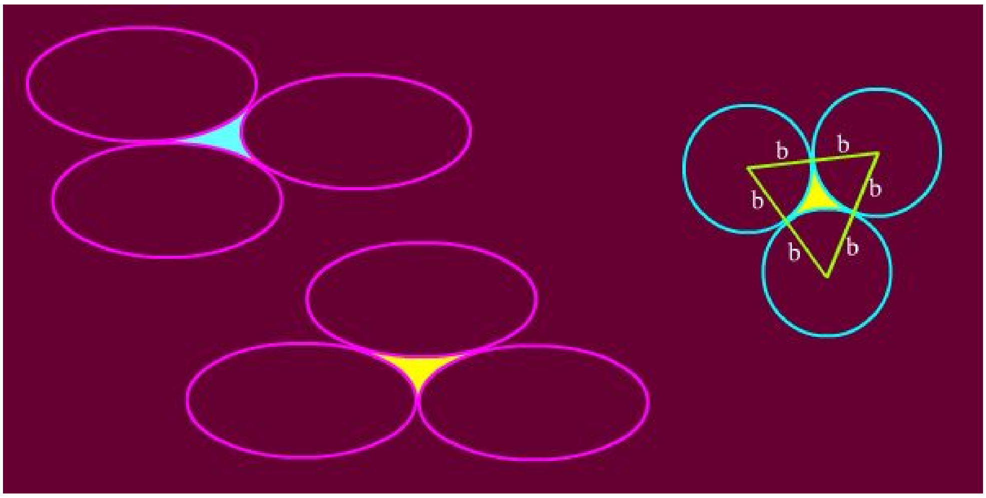
Một ví dụ nữa, giả sử ta phải tìm một số viết bằng chữ số La mã là tích của hai số viết bằng chữ số La mã là LXIII và số XXIV. Chúng ta phải biến đổi hai số này ra dạng chữ số Ả rập-Ấn, đó là 63 và 24. Sau đó ta giải bài toán nhân quen thuộc và được số 1512. Cuối cùng chúng ta đảo ngược đáp số về lại dạng La mã và được MDXII.

Một ví dụ sành điệu hơn, là bài toán chứng minh phương trình $x^7 - 2x^5 + 10x^2 - 1 = 0$ không có nghiệm lớn hơn 1. Bằng cách thế $x = y + 1$, ta biến đổi thành phương trình tương đương:

$$y^7 + 7y^6 + 19y^5 + 25y^4 + 15y^3 + 11y^2 + 17y + 8 = 0$$

Điều phải chứng minh bây giờ là chứng minh phương trình theo y không có nghiệm dương. Điều này là hiển nhiên vì vế trái > 0 với mọi y > 0. Cuối cùng đảo ngược phép biến đổi để được phương trình ban đầu không có nghiệm x > 1.

Ví dụ cuối cùng, giả sử chúng ta phải chứng minh rằng (xem hình) diện tích của tam giác cong giới hạn bởi ba êlip bằng nhau, có các trục cùng hướng và tiếp xúc nhau từng đôi một thì độc lập với vị trí tương đối của ba êlip. Chúng ta biết rằng bằng một phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng đường êlip sẽ biến thành đường tròn có bán kính bằng nửa trục nhỏ của êlip. Chúng ta hãy biến đổi bài toán trên qua phép chiếu sẽ có ba đường tròn bằng nhau tiếp xúc nhau đôi một. Hơn nữa phép chiếu vuông góc biến hai hình có diện tích bằng nhau thành hai hình có diện tích bằng nhau, do đó ta chỉ cần chứng minh diện tích của tam giác cong độc lập với vị trí tương đối của ba đường tròn bằng nhau và tiếp xúc nhau. Điều này là hiển nhiên. Cuối cùng, ta đảo ngược phép chiếu để được lời giải của bài toán ban đầu.



Tiến trình trên không chỉ dùng để giải các bài toán mà còn dùng để khám phá các sự kiện mới. Chúng ta biến đổi một cơ cấu toán học cho trước thành một cơ cấu mới. Bằng cách khảo sát cơ cấu mới, chúng ta phát hiện vài tính chất của nó. Rồi chúng ta đảo ngược phép biến đổi để có tính chất tương ứng của cơ cấu ban đầu. Kỹ thuật này được các nhà toán học ưa dùng, có thể gọi tên là *kỹ thuật biến đổi-khám phá-đảo ngược*.

Trở lại ví dụ cuối cùng vừa nêu, ta nhớ rằng qua phép chiếu p, một diện tích A sẽ thành một diện tích $A' = A\cos\theta$ với θ là góc của mặt phẳng chứa hình A và mặt phẳng chiếu. Trong phép chiếu hình elip có nửa độ dài hai trục là a và b thì góc chiếu là $\cos\theta = b/a$. Gọi A và A' là diện tích tam giác cong trước và sau khi chiếu, theo hình học sơ cấp ta có :

$$A' = b^2(\sqrt{3} - \pi/2)$$

Suy ra:

$$A = A'/\cos\theta = b^2(\sqrt{3} - \pi/2)(a/b) = ab(\sqrt{3} - \pi/2)$$

Chúng ta đã khéo léo tìm được diện tích tam giác cong giới hạn bởi các elip.

Một thành quả vĩ đại nhất, phong phú nhất và được phát triển đến cấp độ cao nhất sinh ra từ kỹ thuật -giải-đảo ngược mà các nhà toán học đã phát minh ra chính là môn hình học giải tích. Ít có kinh nghiệm học tập nào gây ấn tượng hơn cho học sinh trung học khi lần đầu được tiếp xúc với phương pháp mới mẻ và đầy uy lực của môn học này và sử dụng để giải những bài toán hình học cổ điển - bởi vì thật ra hình giải tích là một phương pháp hình học hơn là một ngành hình học.

Tinh túy của phương pháp này, nếu xét trên mặt phẳng, như chúng ta nhớ lại, là việc tương ứng một cặp số thực với một điểm trong mặt phẳng, từ đó tương ứng một đường cong trong mặt phẳng với một phương trình giữa hai biến, nghĩa là với mỗi đường cong trong mặt phẳng có một phương trình hoàn toàn xác định $f(x,y) = 0$, và ngược lại. Từ đó một tính chất giải tích hay đại số của phương trình $f(x, y) = 0$ sẽ tương ứng một tính chất hình học của đường cong liên kết. Nhiêm vụ đi chứng minh một định lí hình học biến thành việc đi chứng minh một định lí đại số hay giải tích. Và hơn nửa, một kết quả đại số hay giải tích ngược lại dẫn đến một phát hiện hình học mới mẻ và bất ngờ. Hình giải tích do đó đã trở thành một phương pháp vô cùng hiệu suất, vừa để giải toán vừa để tìm ra những kết quả mới trong hình học.

Giữa các nhà viết sử không có nhất trí cao khi vinh danh người đầu tiên phát minh môn hình giải tích cũng như năm khai sinh môn học này. Sự khác biệt đều nằm ở chỗ không thống nhất về câu hỏi: yếu tố gì tạo thành môn hình giải tích. Có người cho rằng ngay thời cổ đã có môn này rồi, viện dẫn rằng khái niệm xác định một điểm bằng phương pháp toạ độ đã được các người Ai cập và La mã từ xưa đã dùng khi đo đạc đất đai và vẽ bản đồ. Nhưng mục tiêu của hình giải tích là dùng các công cụ giải tích hay đại số để phát hiện những tính chất hình học nên môn này chỉ được coi là hình thành ở vào thời khắc mà sự phát triển các kí hiệu trườu tượng và phép tính đại số đã đạt đến một trình độ nhất định.

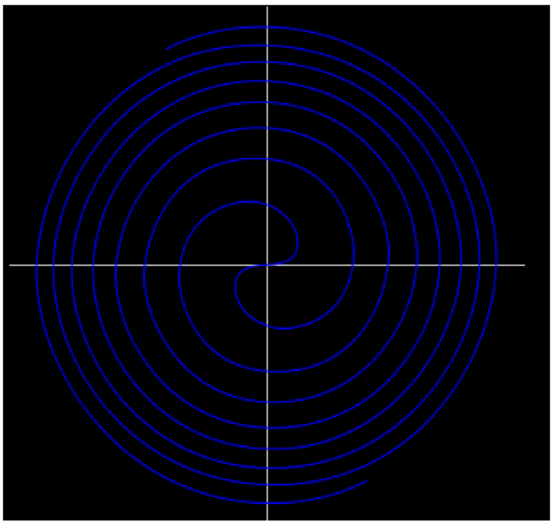
Do đó đa số các sử gia đều cho rằng đóng góp quyết định làm nên hình giải tích xảy ra vào thế kỉ 17 do hai nhà toán học Pháp là René Descartes (1596-1650) và Pierre de Fermat (1601-1665). Chắc chắn là chỉ khi có sự tham gia của hai gương mặt kiệt xuất này thì hình giải tích mới có bộ mặt như chúng ta đã biết.

Đóng góp ban đầu của hai nhân vật này được vinh danh là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC.

Tuyên bố của Descartes về phát minh này được ông phát biểu trong một trong ba phụ lục của tác phẩm *Luận Về Phương Pháp Suy Luận Có Lí* và *Tìm Chân Lí trong Khoa Học* được xuất bàn năm 1637. Chính trong phụ lục thứ ba, có tưa Hình Học, chứa đưng đóng góp của Descartes vào môn học mới khai sinh này. Phụ lục này bắt đầu bằng việc giải thích một số nguyên tắc về hình đại số và chứng tỏ một bước tiến rất

xa đối với người Hi lạp. Đối với người Hi lạp, một số là độ dài một đoạn, tích hai số là diện tích một hình chữ nhật, tích ba số là thể tích khối hộp chữ nhật. Đến đây thì người Hi lạp dừng lại.

Với Descartes, trái lại, x^2 không gợi ý một diện tích, nhưng là số hạng thứ tư trong tỉ lệ thức : $1 : x = x : x^2$, và do đó có thể biểu thị bằng một đoạn có thể dựng được dễ dàng nếu biết x. Dùng đoạn thẳng đơn vị chúng ta có thể, bằng cách này, biểu thị bất cứ lũy thừa bậc bao nhiêu đi nữa của một biến hoặc tích các giá trị của nhiều biến bằng độ dài một đoạn thẳng và thật ra là dựng độ dài đoạn thẳng đó bằng công cụ Euclidean khi giá trị được gán cho biến. Với phương pháp số hoá hình học như thế, Descartes, trong tiểu luận Hình Học của ông, ông đã vạch trên một trục những giá trị x và trên một trục khác những giá trị y và dựng những điểm có toạ độ x , y thỏa mãn một đẳng thức nào đó. Ví dụ với đẳng thức $y = x^2$, thế thì với mỗi giá trị của x, chúng ta có thể dựng những giá trị y như là những số hạng thứ tư của của tỉ số trên. Descartes quan tâm đặc biệt đến việc tìm phương trình những đường được xác định bằng động lực học.



Cùng lúc với Descartes đang tìm cách xây dựng những nền tảng của hình giải tích hiện đại, môn học này cũng chiếm được sự quan tâm của Fermat. Ngay trong bức thư gởi cho Roberval năm 1636, trong đó ông cho biết ý tưởng ông trình bày đã

Fermat và đường xoắn ốc mang tên ông

được ông thai nghén cách đó bảy năm. Những chi tiết của công trình đã được xuất bản dưới hình thức di cảo sau khi ông mất. Trong đó ta tìm thấy phương trình tổng quát của một đường thẳng, đường tròn, và các luận bàn về hyperbol, êlip và parabol. Trong một tác phẩm viết về tiếp tuyến và đường bậc hai hoàn tất trước năm

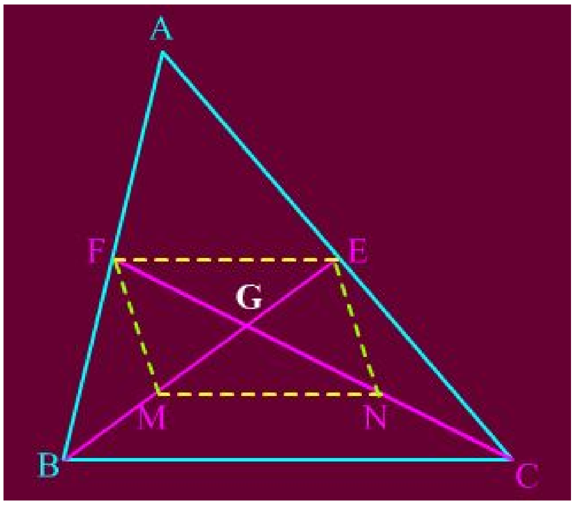
1637, Fermat đã định nghĩa một cách giải tích nhiêu đường cong mới. Khi Descartes đề nghị một ít đường cong mới, sinh ra bởi chuyển động cơ học thì Fermat lại đưa ra nhiều đường cong mới định bởi phương trình đại số. Những đường cong $x^m y^n = a$, $y^n = ax^m$ và $r^n = a\theta$ còn được hiểu là các đường hyperbol, parabol và đường xoắc ốc Fermat.

Nói khác đi Descartes bắt đầu bằng tập hợp điểm rồi sau đó đi tìm phương trình của nó, còn Fermat lại bắt đầu bằng phương trình rồi sau đó mới nghiên cứu tập hợp điểm liên kết với phương trình này. Đây là hai mặt đối nghịch nhau của nguyên tắc cơ bản của hình giải tích.

Để đối chiếu phương pháp tổng hợp của hình học cổ điển và phương pháp phân tích mới hơn của hình giải tích, ta xét định lí quen thuộc :

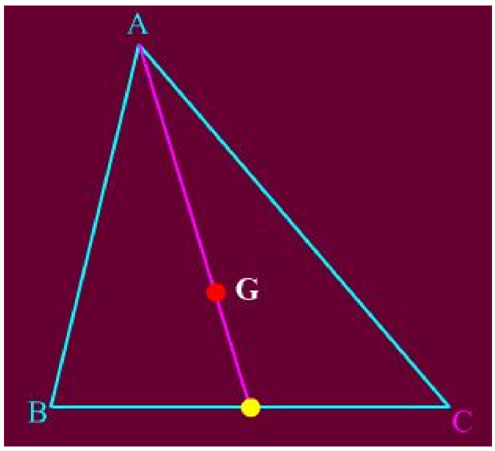
Trong một tam giác các trung tuyến đồng qui tại một điểm, điểm này chia mỗi trung tuyến theo tỉ số 2:1 kể từ đỉnh.

Ở hình cấp 2 học sinh đã biết cách chứng minh định lí này, trong đó ta phải vẽ thêm các đường phụ , và quá trình chứng minh thật không dễ dàng. Nhắc lại cách chứng minh thường như sau :



Gọi G là giao điểm của trung tuyến BE và CF và M, N lần lượt là trung điểm của BG và CG. Đoạn FE song song và bằng nửa BC vì FE là đường trung bình của tam giác ABC. Tương tự MN cũng song song và bằng nửa BC vì MN là đường trung bình của tam giác GBC. Do đó EF và MN song song và bằng nhau, suy ra MNEF là hình bình hành. Do đó : MG = GE và NG = GF. Vậy hai trung tuyến BE và CF cắt nhau tại một điểm chia hai trung tuyến theo tỉ số 2 kể từ đỉnh đến trung điểm tương ứng. Vì tính chất này đúng với bất cứ cặp trung tuyến nào nên suy ra ba trung tuyến đồng qui tại G xác định như trên. Điểm G được gọi là trọng tâm tam giác.

Phép chứng minh trên phải công nhận là có tính thẩm mỹ, nhưng không phải dễ dàng để nghĩ ra, nhất là ở khâu vẽ thêm điểm phụ, đường phụ, thường đòi hỏi một trình độ điêu luyện nhất định. Đó chính là rắc rối thường gặp của phương pháp tổng hợp - người ta không biết bắt đầu từ đâu, và những bước giải tiếp theo như thế nào. Mỗi bài toán thường là những tình huống xử lí khác nhau và độc đáo. Do đó phương pháp tổng hợp đòi hỏi một quá trình luyện tập và thực hành lâu dài mới đạt đến một trình độ nhất định nào đó.



Bây giờ ta hãy chứng minh lại định lí trên bằng phương pháp phân tích của hình giải tích. Đặt tam giác trong hệ trục với các đỉnh A, B, C có toạ độ (a_1, a_2), (b_1, b_2) và (c_1, c_2). Hãy tìm toạ độ điểm G chia trung tuyến AD theo tỉ số 2:1. Tất cả chúng ta cần là công thức điểm chia đoạn theo một tỉ số cho trước như sau: Nếu P là điểm trên đoạn MN sao cho MP/PN = r/s thế thì toạ độ P cho bởi :

$p_1 = (sm_1 + rn_1)/(s + r)$; $p_2 = (sm_2 + rn_2)/(s + r)$

trong đó (m_1, m_2) và (n_1, n_2) là toạ độ của M và N.

Sử dụng công thức này, ta được toạ độ của trung điểm D là :

$d_1 = (b_1 + c_1)/2$; $d_2 = (b_2 + c_2)/2$

Sử dụng lần nửa để tìm toạ độ điểm G sao cho AG/GD = 2/1, ta được :

$g_1 = (a_1 + 2d_1)/3 = (a + b_1 + c_1)/3;$

$g_2 = (a_2 + 2d_2)/3 = (a_2 + b_2 + c_2)/3;$

Các biểu thức này như nhau đối với các toạ độ A, B, C, do đó có thể khẳng định điểm G này cũng là điểm chia các trung tuyến BE và CF theo cùng tỉ số, tức định lí được chứng minh.

Rõ ràng cách chứng minh bằng phương pháp này dễ dàng hơn. Ta chỉ đặt các đối tượng trong một hệ trục, rồi sử dụng công thức có sẵn để tìm toạ độ điểm, phương trình đường . . . Các bước tiến hành đều minh bạch và lúc nào cũng như vậy dù các bài toán có khác nhau. Chứng minh ba đường đồng qui bằng hình cổ điển có nhiều cách khác nhau, mỗi bài lại vận dụng một kiểu chứng minh khác. Nhưng trong phương pháp mới này, ta chỉ việc tìm phương trình các đường rồi tính toạ độ giao điểm để kết luận.

Cũng vậy bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng trong hình học cổ điển là bài toán đa dạng đầy thách thức với nhiều kiểu giải, nhưng trong hình giải tích, ta chỉ có một cách là tìm toạ độ của chúng rồi chứng minh các toạ độ ấy thỏa mãn một phương trình bậc nhất là phương trình một đường thẳng. Bù lại, để làm chủ phương pháp mới này, chúng ta phải thông suốt các công thức và phải thật tinh xảo trong kỹ năng tính toán.

Định lí trên đã được mở rộng trong hình không gian, được biết với tên định lí Commandino (1509-1575). Đoạn nối đỉnh tứ diện với trọng tâm mặt đối diện gọi là trung tuyến của tứ diện. Định lí Commandino nói : *Trong một tứ diện bốn trung tuyến đồng qui tại một điểm, điểm này chia mỗi trung tuyến theo tỉ số 3: 1 kể từ đỉnh.*

Chúng ta đều biết rằng trong hệ trục không gian, các công thức toạ độ cũng không khác. Do đó cách chứng minh cũ có thể áp dụng trong tình huống mở rộng này dễ dàng. Đó là thêm một ưu điểm của phương pháp hình giải tích.

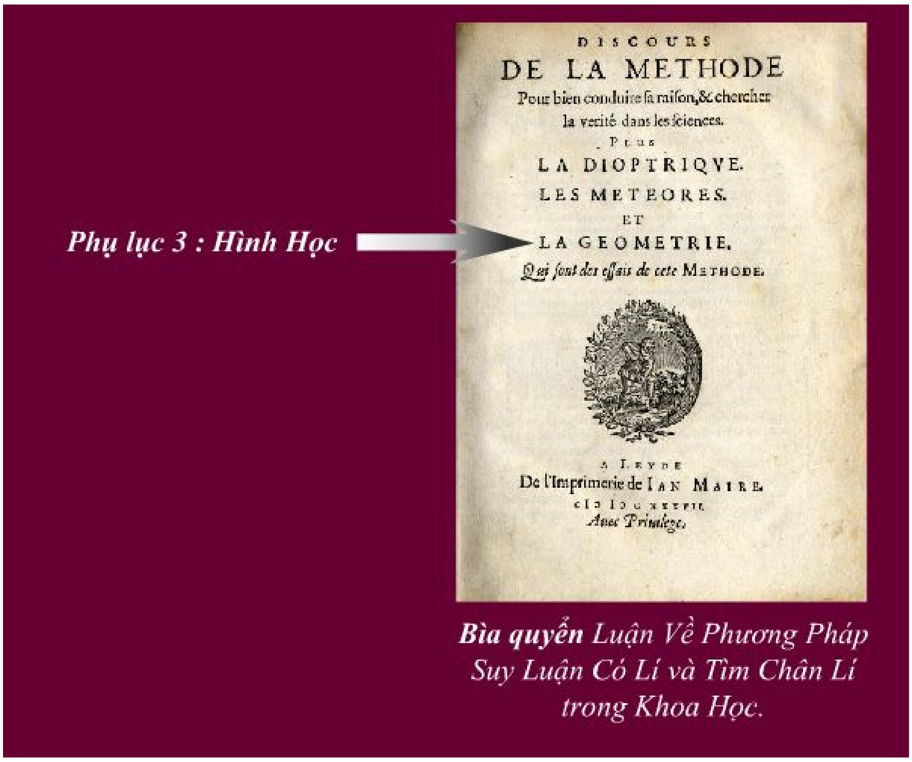
Tóm lại phương pháp hình cổ điển thì mỹ lệ hơn, lãng mạn hơn, sâu sắc hơn và cũng khó nắm bắt hơn trong khi phương pháp hình giải tích thì bao quát hơn, chân phương hơn, uy lực hơn và cũng thân thiện hơn. Một nhà hình học có bản lãnh luôn sử dụng cả hai phương pháp một cách linh hoạt để giải quyết các bài toán của mình.

Trong quyển *Toát Yếu Eudemian*, Proclus (410-485) kể chúng ta rằng Ptolemy Soter, vua đầu tiên của Ai cập và người thành lập Bảo tàng Alexandria, đã bảo trợ cho trường bằng viêc học hình học ở đó dưới sự giảng dạy của Euclid. Ông ta thấy hình sao mà khó, bèn hỏi thầy mình: Có con đường nào khác dễ hơn để học hình không?" Euclid trả lời: "Thưa bệ hạ, ở ngoài đời có hai loại đường, đường dành cho thứ dân và đường dành cho hoàng tộc. Nhưng trong hình học không có đường riêng dành cho bậc vương giả." Vì nhiều học sinh giỏi đại số hơn hình học nên phương pháp hình giải tích có thể coi là "con đường dành cho bậc vương giả" trong hình học mà Euclid nghĩ là không tồn tại.

Cũng tương tự như việc quả táo rơi đã khiến Newton nghĩ ra lực hấp dẫn của trái đất, người ta kể một sự kiện xảy ra khiến ánh chớp hình giải tích loé lên trong đầu của Descartes một buổi sáng sớm khi còn nằm trên giường. Nhìn chú ruồi bò trên trần nhà gần góc phòng, ông chợt phát hiện rằng đường đi của chú ruồi có thể được mô tả nếu ta biết được hệ thức liên hệ giữa khoảng cách của chú đến hai bức tường phòng liên tiếp. Giai thoại không biết có thật không nhưng đúng là có giá trị sư phạm cao.

Tham khảo 1: Tiểu sử Descartes

Tham khảo 1: Tiểu sử Descartes

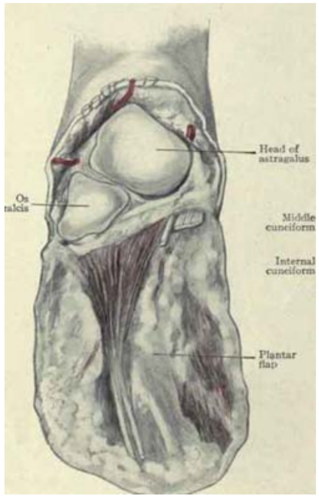


***Bìa quyển** Luận Về Phương Pháp Suy Luận Có Lí và Tìm Chân Lí trong Khoa Học.*

21. Trật tự trong sự hỗn loạn

Trong những loại xương cấu tạo nên bộ khung xương phức tạp và tinh vi của bàn chân là phần xương nằm trong gót chân ngay phía trên xương talus, gọi là xương sên. Trong loài người hoặc các động vật cao cấp có xương bàn chân phát triển, xương sên có hình dạng hoàn toàn không đều đặn, nhưng trong loài có móng, như trừu, dê, hưu nai, xương sên có hình hơi đối xứng, tiết diện gần như vuông với hai đầu bo tròn, một đầu hơi lồi, đầu kia hơi lõm. Những phần xương này đặc chắc và không có tủy, cứng và bền chắc, dáng dấp có hình khối với các rìa kích thước khoảng hai phân hoặc ít hơn, có thể đánh bóng lên.

Đối với các nhà khảo cổ khai quật các di tích tiền sử, thông thường người ta hay tìm gặp một bộ sưu tập đáng kể các loại xương sên của loài động vật có móng, và đôi khi có một số hòn đá nhỏ có màu sắc khác nhau. Hình như có lí khi ức đoán rằng những mãnh xương và những hòn đá sỏi này có thể đã được các người tiền sử dùng đề khắc ghi, đánh dấu các số đếm, và cũng có thể là các đồ chơi cho con cháu họ.



Trong khi cách sử dụng xương sên như đã nói trên trong quần thể các người tiền sử chỉ là ức đoán, thì việc những người Babylone và Ai cập, người Hi lạp và La mã thời trước Công nguyên, dùng xương sên để làm đồ chơi cho trẻ em là điều chác chắn. Chúng ta biết rằng những học sinh chơi với chúng mọi lúc, mọi nơi, thình thoảng giữ cân bằng 4 khúc xương sên trên các khớp ngón tay, rồi dùng ngón tay vẩy chúng lên không và rồi cố bắt lại khi chúng rơi xuống. Cùng vậy, quan sát các bức vẽ trên bình hoa, người ta thấy các khúc xương sên thường được ném vào trong một vòng tròn vẽ trên mặt đất, giống như ngày nay các em chơi bắn bi. Từ triều đại đầu tiên ở Ai cập (khoảng 3500 trước Công nguyên), xương sên được dùng trong nhiều trò chơi. Các trẻ em ngày nay ở Pháp và Ý vẫn còn chơi những trò với xương sên, và lẽ dĩ nhiên xương sên được thay bằng các thẻ kim loại, có thể mua ở các tiệm trong làng.

Có phải trò cờ bạc phát triển từ trò chơi, hay từ việc đánh cá và rút thăm, hay từ việc bói toán và chiêm tinh hoặc sấm truyền? Trong bất cứ trường hợp nào, khoảng 1200 B.C. , hột xúc sắc đã tiến hoá thành một nhân tố tạo ngẫu nhiên thích hợp hơn là ném khúc xương sên. Nó đã xuất hiện đồng thời tại nhiều phần khác nhau trên thế giới, và điều chắc chắn rằng hột xúc sắc đầu tiên được làm bằng cách chà trẹt hai mặt tròn đối diện nhau của xương sên. Các mặt của hột được đánh dấu sau đó bằng cách khoan các vết lõm tròn từ 1 đến 6.

Trò cờ bạc gắn với hột xúc sắc đơn giản và tự nhiên nhất chắc chắn bắt đầu bằng cách ném hột, và người chơi chỉ chú ý đến may rủi hay xác suất khi tính tổng các mặt số hiện lên khi ném một hay nhiều hột. Do đó, mặc dù các nhà triết lí Hi lạp thời cổ cũng bàn luận đôi chút về qui luật tất yếu và tính ngẫu nhiên, nhưng đúng ra là chính những nổ lực tính toán độ may rủi trong trò đánh bạc chính là nguồn gốc của phép tính xác suất.

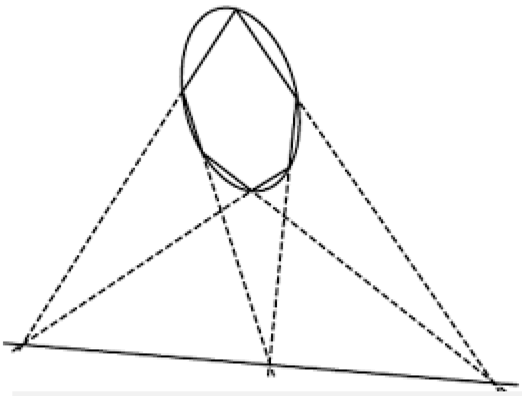
Thật khó cho các nhà toán sử giải tích sự chậm trể ra đời của môn tính xác suất. Có lẽ là phải đợi cho đến khi một hột xúc sắc "vô tư" ra đời, nghĩa là hột súc xắc mà sự xuất hiện 6 mặt đều có cơ hội xãy ra như nhau, chứ ném một cái xương sên lõng chõng hay một miếng gỗ hoặc ngà thì độ xác suất của các mặt không thể tính được .

Chúng ta biết rằng các vua La mã cũng như giai cấp giàu có đều mê đánh bạc. Chẳng hạn vua Claudius (10 B.C. - 54 A.D.) giành nhiều thì giờ đổ hột xúc sắc và còn viết một cuốn sách tựa *là Làm Thế Nào Để Thắng Khi Đổ Hột*, rất tiếc đã thất truyền. Nhưng sự khai sinh của môn khoa học tính độ ngẫu nhiên không xảy ra cho đến thời Phục Hưng, khi khả năng viết và tính số đã lưu truyền rộng rãi, và đại số học cơ bản đã phát triển.

Nhưng mãi đến cuối thế kỉ thứ 15 và đầu thế lỉ 16 mới bắt đầu có những nghiên cứu toán học thực sự về khoa học xác suất, khi có một số nhà toán học Ý cố gắng tính độ may rủi trong một số trò chơi, trong đó có trò đổ hột. Cardano (1501-1576), như ta đã gặp trong bài 16, có viết một cẩm nang ngắn trong đó một số dáng dấp đơn giản của xác suất toán học được đề cập. Nhưng hầu hết mỗi người đều công nhận rằng một bài toán có thê được vinh danh là nguồn cội của khoa học xác suất là bài toán gọi là bài toán tính điểm. Bài toán yêu cầu xác định phần chia tiền đặt cược khi ngừng một cuộc chơi may rủi giữa hai người chơi được giả sử là ngang tài nhau, cho biết số điểm của mổi người tại thời điểm dừng cuộc chơi và số điểm cần thiết để thắng cuộc chơi. Huynh Luca Pacioli (1445-1509), trong quyễn Suma phổ thông của ông, là một trong các tác giả đầu tiên giới thiệu bài toán tính điểm trong một tác phẩm toán học. Bài toán sau đó được Cardano và Tartaglia tham gia. Tất cả họ đều đi tới những kết luận không đúng đắn.

Một sự tiến bộ thực sự chỉ xảy ra khi bài toán được đưa đến Pascal vào năm 1654 từ tay ngài Méré, một tay đánh bạc nhiều kinh nghiệm và có năng lực. Ông nhờ tài năng của Pascal vì ông nhận thấy suy luận và tính toán của mình về bài toán không phù hợp với thực tế. Pascal tỏ ra quan tâm với bài toán và trao đổi thư từ với Fermat. Từ đó bắt đầu một cuộc trao đổi thư tín giũa hai nhà toán học trong đó mỗi người có cách giải bài toán khác nhau và cùng là cách giải đúng. Chính qua cuộc trao đổi thư từ này mà Pascal và Fermat đều là các đồng sáng lập ngành toán học về lý thuyết xác suất đáng được vinh danh, đánh dấu MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC.

Pascal sinh năm 1623 trong miền Auvergne của Pháp và từ bé đã bộc lộ một năng khiếu toán học phi thường. Khi chỉ 12 tuổi, hoàn toàn tự học, ông đã khám phá nhiều định lí hình sơ cấp. Lúc 14 tuổi, ông đã là thành viên trong một nhóm các nhà toán học gặp gỡ nhau hằng tuần, và sau này, năm 1666, trở thành Viện Hàn Lâm Pháp. Năm 16 tuổi, ông đã khám phá, trong nhiều thành tựu, định lí về lục giác " thần bí" phong phú khác thường trong môn hình học họa hình. Vài năm sau, ông sáng chế ra máy tính cộng đầu tiên và bắt đầu áp dụng tài năng kiệt xuất vào lãnh vực vật lí và cơ học. Năm 1648, ông trước tác một toán luận súc tích về hình học hoạ hình, nhưng đã lạc mất.



Trong một lục giác nội tiếp trong một conic, các giao điểm của các cạnh đối thì thẳng hàng.

Hoạt động của một tài năng sớm phát triển và xuất phàm này đã ngừng lại thình lình vào năm 1650, khi, vì sức khoẻ kém, Pascal quyết định từ bỏ tóan học và khoa học để chuyên tâm vào các suy nghiệm tôn giáo. Ba năm sau, tuy vậy ông trở lại toán học trong một thời gian ngắn ngủi, trong đó ông viết cuốn *Traité du triangle arithétique* (Luận về tam giác số học), mà chúng ta sẽ thấy sau đây, đóng một vai trò quan trọng trong môn xác suất mà ta đang bàn đến. Ông tiến hành nhiều thí nghiệm về áp suất của chất lỏng, đưa đến phát minh về sức ép thủy lực, và đơn vị áp suất được mang tên ông. Rồi đến năm 1654, bắt đầu cuộc trao đổi thư từ lịch sử để hình thành lý thuyết và toán xác suất.

Vào cuối năm 1654, sau một tai nạn khi chiếc xe song mã đâm sầm vào thành câu đá giết chết cả hai con ngựa ngay tại chỗ, ông bị thương nặng nơi ngực, và thoát chết trong gang tấc. Pascal nghĩ rằng mình đã nhận được một mặc khải từ Thượng Đế, phán rằng việc ông quay trở lại toán học và khoa học đã làm Ngài phật ý. Ông ngoan ngoản trở về với thần học.

Chỉ một lần duy nhất nữa là vào năm 1685, Pascal trở lại với toán. Đó là dạo ông đang bị nhức răng kinh khủng, một ý tưởng hình học lóe lên trong đầu, và chiếc răng đang đau bổng ngừng hành hạ ông. Cho rằng đây là ý Chúa, ông dùi đầu tám ngày liền vào toán để phát triển ý tưởng vừa manh nha, và một tiểu luận về đường cycloid ra đời.

Những Lá Thư Thôn Quê và *Tư Tưởng* là các tác phẩm nổi tiếng của Pascal, bàn về các vấn đề tôn giáo được ông viết vào những ngày cuối của cuộc đời ngắn ngủi của mình, ngày nay được coi là kiểu mẫu của văn chương cổ điển Pháp. Ông mất tại Paris sau một cơn bạo bệnh kéo dài vào năm 1662 ở tuổi 37 non yểu.

Trái với cuộc đời ngắn ngủi, dày vò và luôn thống khổ vì các cơn hoang tưởng tôn giáo của Passal, cuộc đời của Fermat tương đối dài, bình an, sung mãn và hầu như hoạt động liên tục. Ông sinh ở Beaumont de Lomagne gần Toulouse của Pháp, vào năm 1601(?), con một thương gia giàu có, lúc nhỏ cũng học ở nhà như Pascal.

Năm 1631, Fermat lập nghiệp tại Toulouse với chức danh ủy viên hội đồng thanh tra, và năm 1648 được đề bạt đến chức cố vấn Nhà vua tại nghị viện địa phương. Trong chức vụ này, ông làm tròn trách nhiệm với sự cẩn trọng và tỉ mỉ của một luật sư về hưu nhún nhường, và dành trọn thời gian rảnh rỗi để nghiên cứu và sáng tạo toán học. Mặc dù lúc sinh thời ông ít khi xuất bản công trình nghiên cứu của mình, ông lại thường trao đổi thư từ khoa học với nhiều nhà toán học hàng đầu của thời đại, và do đó có ảnh hưởng rất nhiều với người đương thời.

Fermat đã làm giàu cho nhiều ngành toán học với nhiều đóng góp quan trọng, được đánh giá là nhà toán học Pháp vĩ đại nhất của thế kỉ 17. Trong bài trước, chúng ta được biết ông là đồng sáng lập ngành hình giải tích, trong bài này chúng ta sẽ biết đến ông như người đặt nền tảng cho lý thuyết xác suất, và trong bài sau chúng ta sẽ thấy phần đóng góp của ông vào sự phát triển khởi thủy của môn vi tích phân cũng rất đáng kể. Nhưng trong những đóng góp khác nhau của ông cho toán học, đóng góp nổi bật nhất là sự xây dựng lý thuyết số hiện đại, một ngành toán học trong đó ông bộc lộ một năng khiếu phi thường và một năng lực ấn tượng và đáng kinh ngạc, đặt ông lên tầm những nhà lý thuyết số hàng đầu của mọi thời.

Fermat mất tại Castres đột ngột năm 1665. Mộ ông, lúc đầu đặt tại Nhà Thờ Augustines ở Toulouse, sau đó đã được dời đến bảo tàng địa phương.

Chúng ta hãy trở về bài toán chia điểm, tìm hiểu cách giải của Fermat và Pascal trong thư từ trao đổi của họ năm 1654, bắt đầu một nghiên cứu nghiêm túc về xác suất. Trường hợp minh họa bởi hai nhà toán học Pháp là trong đó ta tìm cách chia tiền đặt cược trong trò chơi giữa hai đối thủ ngang tài A và B khi đó A đang cần thêm 2 điểm nũa để thắng còn B cần thêm 3 điểm nửa để thắng. Trước tiên chúng ta sẽ xem cách giải của Fermat, cách này đơn giản hơn, cụ thể hơn; còn cách giải của Pascal thì tinh tế hơn và có thể tổng quát hoá được.

Dễ thấy rằng phải cần bốn lượt chơi nữa sẽ phân thắng bại. Fermat gọi a là lượt chơi mà A thắng điểm và b là lượt B thắng, có 16 hoán vị các khả năng có thể xãy ra là:

aaaa	aaab	abba	bbab
baaa	bbaa	abab	babb
abaa	baba	aabb	abbb
aaba	baab	bbba	bbbb

trong đó có 11 trường hợp A thắng 2 lượt trở lên và thắng cuộc chơi trong khi chỉ có 5 trường hợp B thắng 3 lượt trở lên và thắng cuộc chơi. Do đó tỉ lệ tiền đặt cược trong tình huống này phải được chia theo tỉ lệ là 11:5. Trong trường hợp tổng quát, nếu A cần m điểm để thắng và B cần n điểm để thắng, ta liệt kê 2m + n – 1 các hoán vị có thể xãy ra giữa hai chữ a và b lấy đúng m + n – 1 lần. Sau đó tìm số α các trường hợp trong đó a xuất hiện ít nhất m lần và đếm số β các trường hợp b xuất hiện ít nhất n lần. Tỉ lệ chia tiền đặt cược là α/β.

Pascal giải bài toán chia điểm bằng cách dùng "tam giác số học", một tam giác số gồm các dãy số đã được ông trình bày trong *Traité du triangle arithmétique*, mặc dù chỉ được in vào năm 1665, đã được ông viết từ năm 1653. Ông xây dựng "tam giác số học" của mình như trong hình 1. Bất cứ phần tử nào (từ hàng thứ hai trở xuống) đều là tổng của tất cả phần tử ở hàng ngay trên và ở về bên trái của phần tử đó. Chẳng hạn ở hang thứ tư: 35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1

Ta tạo một tam giác, có bậc nào đó, bằng cách kẻ một đường chéo như trong hình. Các học sinh có thể nhận ra là các số hạng của đường chéo chính là các hệ số liên tiếp trong khai triển nhị thức Newton. Ví dụ, các số ở dọc theo đường chéo thứ 5, là 1, 4, 6, 4, 1 là các hệ số của khai triển $(a + b)^4$. Pascal dùngcác số hạng của tam giác này để tìm các hệ số của nhị thức. Ông cũng dùng nó để tìm số tổ hợp n chập r vật, kí hiệu: C(n, r) = n!/r!(n – r)! (ở VN, chúng ta dùng kí hiệu C_n^r), trong đó n! = n(n – 1)(n – 2). . .(3)(2)(1).

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	**4**	**10**	**20**	35	56
1	5	15	**35**	70	126
1	6	21	56	126	252

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Ta có thể chứng minh dễ dàng rằng các số hạng dọc theo đường chéo thứ 5 lần lượt là :

C(4, 4) = 1, C(4, 3) = 4, C(4, 2) = 6, C(4, 1) = 4, C(4, 0) = 1.

Vì C(4, 4) là số cách để được 4 chữ a, C(4, 3) là số cách để được 3 chữ a, . . ., suy ra đáp số cần tìm là :

[C(4, 4) + C(4, 3) + C(4, 2)]: [C(4, 1) + C(4, 0)] = (1 + 4 + 6) : (4 + 1) = 11:5.

Trong trường hợp tổng quát, nếu A cần thêm m điểm và B cần n điểm để thắng, ta chọn đường chéo thứ m + n của tam giác số học này, rồi tìm tổng số α của n phần tử đầu tiên và tổng β của m số hạng cuối của dãy số trên đường chéo. Tỉ lệ chia là α/β.

Có nhiều hệ thức giữa những số của tam giác số học, một số này được phát hiện bởi Pascal. Pascal không phải là người đầu tiên tạo ra tam giác số học. Tam giác loại này đã được người Trung hoa và Ba tư biết đến vài thế kỉ trước. Nhưng vì nhiều tính chất của tam giác đã được Pascal tìm ra và áp dụng chúng nên tam giác này thường được gọi la tam giác Pascal. Qua tiểu luận của Pascal về tam giác, ông đã trình bày lần đầu tiên phương pháp quy nạp toán học.

Với việc giải bài toán chia điểm mà Fermat và Pascal đã trao đổi qua thư tín, MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TÓAN HỌC được vinh danh và một lý thuyết toán học mới về xác suất đã vào bệ phóng. Năm 1657, một thiên tài toán học Hà lan tên Christiaan Huygens (1629-1695) viết một chuyên luận về xác suất, dựa vào các thư tín của Pascal-Fermat. Tiếp theo là di cảo của Jacob Bernouilli xuất hiện năm 1713, phát triển các công trình của Huygens lên một tầm cao mới. Sau những nổ lực tiên phong này, chủ đề xác suất được nhiều tài năng như De Moivre, Daniel Bernouilli, Leonard Euler, Louis Lagrange, Laplace, và còn nhiều nhiều nữa tham gia và phát triển.

Thật là mê hoặc và đồng thời cũng phần nào đáng kinh ngạc khi nhận ra rằng các nhà toán học có thể phát triển một ngành toán học trong đó các qui luật có lý có thể vận dụng vào những tình huống chỉ dựa vào yếu tố may rủi. Ngành khoa học này lại rất thực tế, nó là ngôn ngữ của mọi nghiên cứu, nó đã xâm nhập vào các ngành xã hội, sinh học, giáo dục, kinh tế, quản lí doanh nghiệp, giá trị của nó đã được chứng thực qua sự tồn tại của vô số công ty bảo hiểm lừng danh, Về ngành khoa học xác suất này, nhà toán học Pháp nổi tiếng Laplace nhận xét rằng, mặc dù nó bắt đầu bằng một vài nhận định trong các trò chơi may rủi tầm thường, nó đã trở thành một trong những lãnh vực quan trọng nhất của kiến thức nhân loại. Còn nhà lí luận và kinh tế William Stanley Jevons (1835-1882) cho rằng nó là “một kim chỉ nam của cuộc sống và ít khi nào chúng ta đi một bước hoặc lấy một quyết định mà không làm một phép tính đúng hay sai về xác suất.”

Tham khảo 1: xem thêm tiểu sử Pascal
Tham khảo 2: xem thêm về tam giác Pascal

23. Như Đóng Và Mở Cửa

Ta nên nhớ rằng phép tính tích phân xuất phát từ thời Hy lạp cổ trong nỗ lực tìm ra công thức tinh diện tích, thể tích và độ dài đường cong. Ý tưởng là, nếu xét về diện tích, xem nó là giá trị gần đúng của nhiều, rất nhiều mảnh nhỏ hình chữ nhật ghép lại. Sử dụng thuật ngữ mới, ta nói diện tích là giới hạn của tổng diện tích các miếng này khi số các miếng đó tăng lên vô hạn và chiều rộng của các miếng tiến đến 0.

Với sự xuất hiện của hình giải tích vào thế kỷ mười bảy, vấn đề cuối cùng đã hình thành như sau:

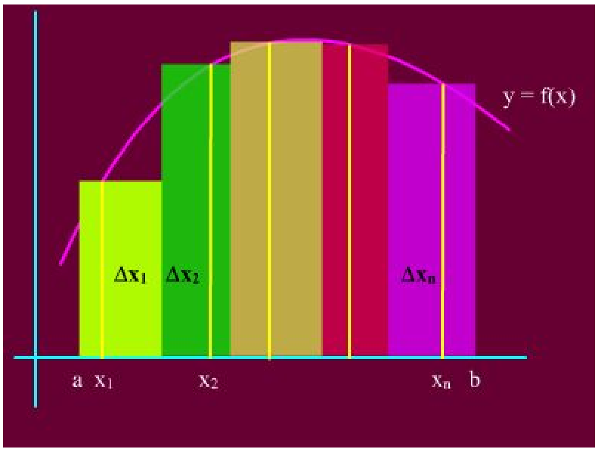
Cho y = f(x) có đồ thị là một đường cong liên tục nằm phía trên trục Ox trong hệ trục vuông góc Oxy. Xét diện tích A của phần giới hạn bởi trục Ox, đồ thị y = f(x), và hai đường thẳng x = a, x = b. Chia diện tích này thành n miếng thẳng đứng có chiều rộng Δx_1, Δx_2 , . . . , Δx_i , . . ., Δx_n . Trong mỗi miếng ta chọn một tungđộ : $f(x_1)$ trong miếng thứ nhất, . . ., $f(x_i)$ trong miếng thứ i . . . Tổng các diện tích của n miếng chữ nhật là giá trị gần đúng của diện tích A:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = f(x_1).\Delta x_1 + f(x_2).\Delta x_2 + \ldots + f(x_n).\Delta x_n$$

Và diện tích A là :

$$A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_1 \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Nói một cách phóng khoáng, diện tích A là tổng của vô hạn hình chữ nhật vô cùng mỏng. Với kí hiệu tích phân do Leibniz sáng tạo, diện tích A trở thành một kí hiệu rất quen thuộc với chúng ta:



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Và như thế ta có: $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_1 \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

trong đó f(x)dx là diện tích của một miếng chữ nhật vô cùng mỏng và chữ $\sum$ của kí hiệu được lấy từ mẫu tự đầu của từ *sum* nghĩa là tổng các miếng chữ nhật lấy từ x = a đến x = b.

Phép tích vi phân được sáng tạo trong thế kỷ 17, như đã đề cập trong bài trước, đạo hàm dF/dx của hàm số y = F(x) được định nghĩa như sau:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

nếu giới hạn này tồn tại. Giới hạn này là độ dốc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số y = F(x) tại điểm có hoành độ x.

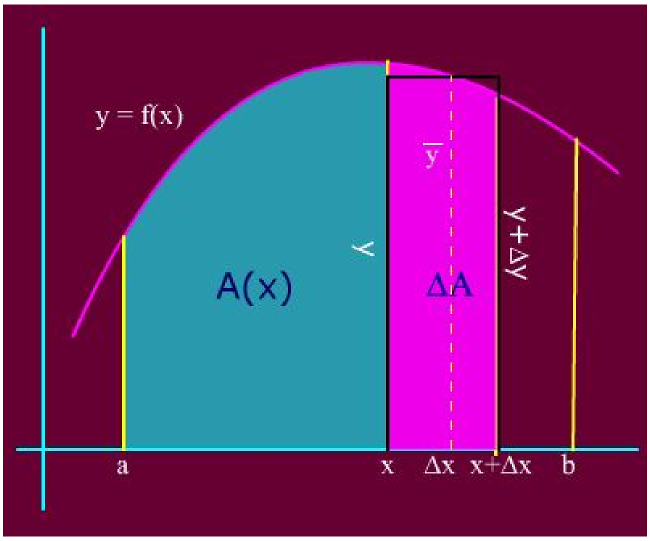
Thoạt nhìn hình như phép tính vi phân và tích phân hoàn toàn khác nhau, một cái dựa vào tổng vô hạn của một lượng vô cùng nhỏ, còn cái kia là giới hạn của một thương mà tử và mẫu đều vô cùng bé. Trong nửa cuối thế kỷ thứ 17, một khám phá quan trong được tìm ra, cho thấy hai ý tưởng tưởng như khác nhau này, vi phân và tích phân, thật ra là những phép toán nghịch đảo nhau, cũng như phép cộng và trừ, phép nhân và phép chia. Sự kiện đáng kinh ngạc này được gọi là định lí nền tảng của phép vi tích phân, đánh dấu MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TOÁN HỌC.

Chúng ta hãy trình bày vắn tắt phép chứng minh định lí nền tảng của phép tính vi tích phân. Xét tích phân xác định: $\int_a^b f(x)dx$

trong đó f(x) là hàm số liên tục và không âm trên đoạn [a; b]. Như đã trình bày, tích phân này có thể coi như là diện tích giới hạn bởi đồ thị y = f(x), trục Ox, x = a, x = b.

Bây giờ ta xét diện tích giới hạn bởi đồ thị, trục Ox, x = a và một đường thẳng di động vuông góc với Ox tại điểm x thuộc đoạn [a; b]. Diện tích này phụ thuộc vào x, do đó là một hàm số theo x, ta kí hiệu hàm số này là A(x). Ta tìm: dA(x)/dx.

Cho x tăng lên một giá trị Δx, thế thì A(x) tăng lên một giá trị ΔA (miền màu hồng). Dễ thấy rằng diện tích này nằm giữa diện tích hai hình chữ nhật có cùng chiều rộng là Δx và có chiều cao lần lượt là miny và maxy trong đó miny, maxy lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn [x , x + Δx]. Do đó tồn tại một giá trị $\overline{y}$ trung gian giữa miny và maxy sao cho: ΔA = $\overline{y}$. Δx (diện tích miếng hình chữ nhật viền đen)



Suy ra: $\dfrac{\Delta A}{\Delta x} = \overline{y}$

Khi Δx tiến tới 0 thì $\overline{y}$ tiến tới y, từ đó:

$$\lim_{\Delta x -> 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = y \qquad hay \qquad \frac{dA(x)}{dx} = f(x)$$

Tức A(x) là hàm số có đạo hàm là f(x).

Vì có vô số hàm số đều có đạo hàm là f(x) và nếu F(x) có đạo hàm là f(x) thì mọi hàm số có đạo hàm là f(x) đều có dạng F(x) + C, C là một hằng số tùy ý. Do đó:

A(x) = F(x) + C

Để xác định số C này, ta thấy rằng A(x) = 0 khi x = a , do đó:

0 = F(a) + C <=> C = - F(a)

và như thế A(x) = F(x) – F(a)

Để tìm diện tích A đã xác định ta chỉ việc thế x = b và được :

A = A(b) = F(b) – F(a)

Kết luận: $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) - F(a) trong đó F(x) là một hàm số bất kì có đạo hàm là f(x).

Ta chỉ F(x) + C bằng kí hiệu $\int f(x)dx$ và được gọi là tích phân bất định của f(x). Rõ ràng tìm một tích phân bất định là công việc ngược lại với việc tìm đạo hàm, đó là hai phép toán nghịch đảo cũng như việc đóng cửa và mở cửa, việc châm đầy và rót cạn, phép cộng và phép trừ . . .

Trong chương trình của những sách giáo khoa gần đây (*trong đó có VN : người dịch*) ta định nghĩa tích phân xác định là hiệu F(b) – F(a) trong đó F(x) là một tích phân bất định (hay nguyên hàm của f(x)). Và như thế thì đẳng thức:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

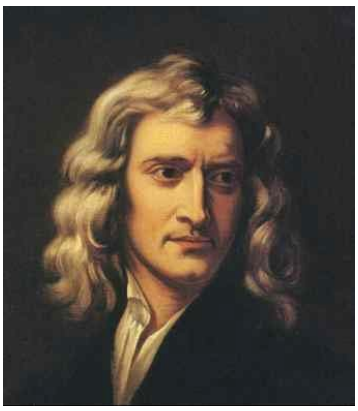
trước đây là định nghĩa thì bây giờ trở thành định lí.

Tác dụng của phép vi tích phân cho bởi định lí nền tảng nêu trên quá lớn lao đến sư phát triển không chỉ của toán học mà còn đến tiến bộ của nền văn minh, đến nỗi ngày nay nếu người nào không biết đến nó, coi như là có khiếm khuyết về học vấn.

Công cụ mới này có sức mạnh không thể tin được nhằm giải quyết những bài toán đã gây bế tắc trong nhiều thế kỷ trước đây. Phương pháp của nó có thể áp dụng để tính độ dài đường cong, diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong, diện tích và thể tích các khối, đặc biệt là khối tròn xoay, các bài tóan cực trị, mọi bài toán liên quan đến tốc độ biến thiên, những câu hỏi hình học về tiếp tuyến, pháp tuyến, tiệm cận, bao hình, và những câu hỏi về vật lý như tốc độ, gia tốc, công, năng lượng, lực, áp suất, trọng tâm, quán tính và lực hấp dẫn. . .

Thật ra phải qua một quá trình dài từ Archimedes (trước Công Nguyên), Fermat , Pascal (1629), qua Torricelli (1646), qua Gregory (1668), . . . rồi Barrow (1669) đến cuối cùng, dưới thiên tài của Newton và Leibniz, mới đột phá bùng nổ thành định lí nền tảng của vi tích phẩn, đưa toán học lên đến tầm cao mới. Đúng như Newton đã phát biểu một cách khiêm nhượng: *"Nếu tôi có thể nhìn xa hơn những người khác, đó là bởi vì tôi đã đứng lên vai của các vĩ nhân"*

Chắc chắn không có chủ đề nào trong tóan học mà việc dạy nó gây hứng thú hơn là dạy môn vi tích phân. Người ta thường nói đùa rằng có thể nhận ra một sinh viên đại học đã học qua môn vi tích phân bằng cách quan sát mắt anh ta: mắt anh ta không còn lông mày nữa. Vì phải trợn mắt một cách thán phục quá nhiều lần khi chứng kiến quá nhiều ứng dụng đáng kinh ngạc của vi tích phân mà lông mày các sinh viên cứ rướn lên cao mải rồi biến mất lúc nào không hay.



xem tiểu sử Newton xem tiểu sử Leibniz

24. Chuỗi Số Lũy Thừa

Các học sinh trung học đã từng gặp cấp số cộng và nhân trong giáo trình giải tích lớp 11. Hai dãy số này là các dãy số cơ bản và quan trọng trong một khái niệm tổng quát hơn gọi là dãy số, và tổng các số hạng của dãy gọi là chuỗi số. Chúng ta hãy giải thích rõ hơn về những kháo niệm này. Ví dụ,

$$1, 4, 9, 16, 25$$

và

$$1, - x , x^2/2 , - x^3/3, x^4/4, - x^5/5$$

là những dãy số, trong khi đó

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

và

$$1 - x + x^2/2 - x^3/3 + x^4/4 - x^5/5$$

là những chuỗi số liên kết với dãy số.

Số hạng tổng quát, hay số hạng thứ n, của một dãy số hoặc một chuỗi số là một biểu thức theo n, cho biết công thức xác định số hạng đó. Như trong ví dụ trên, số hạng tổng quát của dãy số đầu là n^2, của dãy số thứ hai là $(- x)^n – 1/(n – 1)$, trừ số hạng đầu tiên.

Khi số các số hạng của dãy số có giới hạn, ta bảo dãy số hoặc chuỗi số là hữu hạn, ngược lại ta có dãy số hay chuỗi số là vô hạn. Các ví dụ trên là các dãy số và chuỗi số hữu hạn. Nếu một dãy số hay chuỗi số vô hạn, ta kí hiệu bằng cách liệt kê vài số hạng đầu, số hạng tổng quát và các chấm, như sau:

$$1, 4, 9, . . ., n^2,. . .$$

và

$$1 + 4 + 9 + . . . + n^2 + . . .$$

Cho một chuỗi số bất kì, kí hiệu $u_1 + u_2 + u_3 + . . .+ u_n + . . .$,

Ta bảo *chuỗi số hội tụ* nếu: $\lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + u_3 + . . .+ u_n)$

tồn tại và hữu hạn; ngược lại ta nói *chuỗi số phân kì*. Trong trường hợp trước, nếu giới hạn là S, ta nói S là tổng của chuỗi số vô hạn, và kí hiệu:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + . . .+ u_n + . . .$$

Học sinh trung học chắc chắn không quên cấp số cộng là dãy số có dạng:

$$a, a + d, a + 2d, ... [a + (n – 1)d], . . .$$

trong đó a và d là hằng số, và cấp số nhân là dãy số có dạng

$$a, ar, ar^2, . . ., ar^{n – 1}, . . .$$

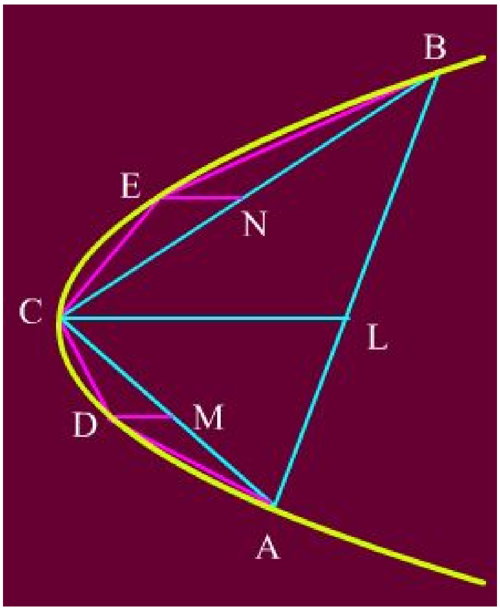
trong đó a và r là hằng số.

Đây là những dãy số xưa nhất, đã được các nhà tóan học Ai cập và Babylone thời cổ biết đến, khoảng hai ngàn năm trước Công Nguyên. Tuy nhiên, người đầu tiên tính được tổng các chuỗi số vô hạn hội tụ chính là Archimedes, trong luận thuyết *Quadrature of the Parabola* (Phép Cầu Phương Parabol) của ông, ông đã chứng tỏ rằng chuỗi số nhân:

$$1 + 1/4 +1/4^2 + 1/4^3 + . . . + 1/4^{n - 1} + . . .$$

bằng 4/3. Dừng lại một chút để xem chuỗi số này xuất hiện như thế nào trong công trình của Archimedes cũng là điều thú vị.

Gọi AB là một dây cung parabol trong hình bên. Từ các trung điểm L, M, N của AB, AC và BC, kẻ các đường song song với trục của parabol, chúng cắt cung parabol tại C, D và E. Từ định nghĩa hình học của parabol, Archimedes chứng tỏ rằng



$\Delta CDA + \Delta CEB = \Delta ACB/4$ (Kí hiệu Δ chỉ diện tích tam giác)

Bằng cách lập lại tiến trình này cho các dây vừa xuất hiện là AD, DC, CE, EB, ta suy ra rằng diện tích của phần parabol giới hạn bởi dây AB là tổng vô hạn :

$\Delta ABC + \Delta ABC/4 + \Delta ABC/4^2 + \ldots + \Delta ABC/4^{n-1} + \ldots$

$= \Delta ABC(1 + 1/4 + 1/4^2 + \ldots + 1/4^{n-1} + \ldots)$

$= 4/3. \Delta ABC$

Mặc dù Archimedes là người đầu tiên tính tổng của một chuỗi số vô hạn đặc biệt, nhưng người đầu tiên đã nghiên cứu đầy đủ khái niệm hội tụ của chuỗi số vô hạn chính là nhà toán học lừng lẫy người Đức là Carl Friedrich Gauss (1777-1855), trong công trình về chuỗi số hypergeometric vào năm 1812.

Công trình tiên phong này của Archimedes và Gauss chắc chắn là những trang sử quan trọng trong toán học, tuy nhiên còn hai sự kiện nổi bật khác cần phải được tôn vinh. Sự kiện thứ nhất là công trình của Brook Taylor trong năm 1715, cùng với Colin Mac Laurin năm 1742 nghiên cứu về chuỗi số lũy thừa, là chủ đề mà bài viết này đang đề cập. Sự kiện thứ hai liên quan đến công trình của Joseph Fourier năm 1807-1822 về chuỗi số lượng giác sẽ được trình bày trong bài sau.

Một chuỗi số vô hạn có dạng $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$

(n nguyên dương) với biến x và các hệ số a_i, được gọi là chuỗi số lũy thừa theo x. Số hạng tổng quát của nó chính là đa thức.

Tổng quát hơn, một chuỗi số có dạng $a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots + a_{n-1}(x- a)^{n-1} + \ldots$

gọi là chuỗi số lũy thừa theo x- a.

Nếu trong chuỗi số lũy thừa theo x ở trên, ta gán cho x một giá trị đặc biệt nào đó, ta được một chuỗi số các số hạng là hằng số, chúng có thể hội tụ hay không. Hiển nhiên chuỗi số hội tụ khi x = 0. Nó có thể hội tụ với các giá trị khác của x hoặc có thể không hội tụ với giá trị nào khác của x, thậm chí có thể hội tụ với mọi giá trị của x. Trong giải tích, ta được biết rằng nếu chuỗi số hội tụ khi x = b (b hằng số dương) thì nó cũng hội tụ với mọi x thỏa $|x| < b$, và nều nó phân kì khi x = b thì nó cũng sẽ phân kì với mọi x thỏa $|x| > b$. Suy ra rằng tập hợp những giá trị của x sao cho chuỗi số hội tụ tạo thành một khoảng có dạng $-b < x < b$, có thể thêm một hay hai đầu mút. Khoảng (- b , b) [hay (– oo, + oo) nếu chuỗi số hội tụ với mọi x] được gọi là khỏang hội tụ của chuỗi số lũy thừa, có tâm là 0. Tương tự, chuỗi số lũy thừa theo x – a có khoảng hội tụ dạng (a – b, a + b), có tâm là a.

Một chuỗi số lũy thừa theo x hiển nhiên là một hàm số theo x với mọi x thuộc khoảng hội tụ. Do đó ta có thể viết $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$

Khi một hàm số nào đó được viết dưới dạng của một chuỗi số lũy thừa theo x, ta nói hàm số đó được khai triển theo chuỗi số lũy thừa của x. Ví dụ, trong cấp số nhân, ta chứng minh được là :

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

hội tụ về $1/(1 - x)$ với mọi x thuộc khoảng (- 1, 1). Do đó:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

Nếu một hàm số cho trước được biểu diễn bằng chuỗi số lũy thừa, ta tự hỏi các hệ số a_i sẽ như thế nào. Để trả lời câu hỏi này, ta tiến hành như sau. Trong đẳng thức

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots (*)$$

Cho x = 0, ta được : $f(0) = a_0$.

Giả sữ chuỗi số đạo hàm được đến bậc vô hạn, thế thì:

$$f'(x) = a_1 + 2a^2x + 3a_3x^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots$$

$$f'''(x) = 6a_2 + \ldots + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + \ldots$$

và cứ thế. Bằng cách cho x = 0 vào các đẳng thức này, ta được :

$$f'(0) = a_1 ,\ f''(0) = 2!a_2 ,\ f'''(0) = 3!a_3 , \ldots ,\ f^{(n-1)}(0) = (n-1)!a_{n-1}, \ \ldots$$

Giải để tìm a_i, rồi thế vào (*), ta được :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots$$

Tương tự nếu một nếu một hàm số có thể được biểu diễn bằng chuỗi số lũy thừa theo x – a thì nó có thể được phân tích như sau:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \ldots$$

Khai triển f(x) thành một chuỗi số lũy thừa của x – a xuất hiện năm 1715 mà không đề cập đến sự hội tụ trong tác phẩm *Methodus incrementorum directa et inverse* của nhà toán học Anh Taylor (1685-1731), và từ đó được gọi tên khai triển Taylor của hàm số f(x) tại x = a. Khai triển Taylor ứng với a = 0 được gọi là khai triển Maclaurin của f(x), mặc dù Taylor và Stirling có đề cập đến khai triển này vài năm sau đó. Nó được gọi là khai triển Maclaurin sau khi nó được sử dụng đến trong công trình vĩ đại và có ảnh hưởng gồm 2 quyển có tên *Luận Thuyết Về Vi Phân* của Maclaurin (1698-1746), trong đó có tham khảo đến phát hiện của Taylor và Stirling.

Taylor áp dụng chuỗi số của mình để giải phương trình số như sau. Gọi a là một giá trị gần đúng của nghiệm của phương trình f(x) = 0. Đặt f(a) = k, f '(a) = k', f "(a) = k", và x – a = h. Khai triển Taylor hàm số f(x) tại x = a. Loại bỏ tất cả các lũy thừa của h lớn hơn 2. Thế giá trị của k, k', k" và giải để tìm h. Thế thì a + h là là một giá trị xấp xỉ tốt hơn a của nghiệm đòi hỏi. Bằng cách áp dụng liên tiếp tiến trình này, ta càng lúc càng được các giá trị gần đúng tốt hơn của nghiệm.

Tầm quan trọng đầy đủ của chuỗi số Taylor chỉ mải đến năm 1755 mới được công nhận khi Euler áp dụng chúng một cách tài tình trong phép tính vi tích phân, và sau đó, đến năm 1797 Lagrange dùng chuỗi số này làm nền tảng của lý thuyết hàm của ông.

Maclaurin là một trong những nhà toán học lỗi lạc nhất của thế kỷ 18. Ông cũng đóng góp đáng kể trong hình học, đặc biệt trong việc nghiên cứu đường cong phẳng bậc cao, và ông chứng tỏ khả năng phi thường của mình khi áp dụng hình cổ điển vào các bài toán vật lí. Trong các công trình toán áp dụng có bài viết đoạt giải của ông về lý thuyết toán về sóng. Trong quyển *Luận Thuyết Về Vi Phân* của ông có phần nghiên cứu về lực hấp dẫn lẫn nhau giữa hai khối ellipsoid tròn xoay.

Maclaurin là một thiên tài. Ông trúng tuyển vào Đại học Glasgow lúc 11 tuổi. Năm 15 tuổi ông nhận được bằng cao học với luận án về lực hấp dẫn. Lúc 19 tuổi ông được bầu vào ghế dạy toán ở trường Marischal ở Aberdeen, và vào năm 21 tuổi cho in công trình quan trọng đầu tiên là Geometria organica. Năm 27 tuổi ông làm phụ tá cho giáo sư toán học của Đại học Edinburgh. Vì có khó khăn trong việc trả lương cho ông nên chính Newton đã góp một phần tài chính để đại học có thể trả lương cho người phụ việc trẻ tuổi xuất sắc này. Sau đó Maclaurin kế vị người mà ông phụ tá. Công trình của ông về vi tích phân xuất hiện khi ông 44 tuổi, chỉ bốn năm trước khi mất. Đó là tác phẩm trình bày có hệ thống và luận lí đầu tiên về phương pháp vi tích phân của Newton để đáp trả cho viêc công kích đã phá của Berkeley về nền tảng của phép tính vi tích phân.

Chỉ khi nghiên cứu về vi tích phân chúng ta mới thấy được tầm hữu dụng của khai triển Taylor Maclaurin. Chắc chắn các học sinh trung học, ở một lúc nào đó, có thể ngạc nhiên tự hỏi làm thế nào mà người ta tạo ra được các bảng số lượng giác. logarit, lũy thừa. Dù bây giờ có máy tính nên các bảng số này chỉ còn là lịch sử, thì câu hỏi được đặt ra là các máy tính đã được “ dạy” như thế nào để tính được các giá trị của các hàm số ấy. Câu trả lời là chúng đã được tính bằng khai triển Taylor Maclaurin.

Giả sữ, ví dụ, người ta muốn tính giá trị xấp xỉ của e. Độc giả có thể kiểm tra kết quả sau bằng cách áp dụng khai triển Maclaurin cho e^x :

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots + x^{n-1}/(n-1)! + \ldots$$

Cho x = 1, ta được

$$e = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots$$
$$= 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}\ 166667 + 0{,}\ 041667 + 0{,}008333 + 0{,}001389 + 0{,}000198 + \ldots$$

(chú ý các số hạng này có thể được tính bằng tay dễ dàng bằng cách nhận xét số hạng thứ k là số hạng thứ k – 1 chia cho k)

Kết quả ta được giá trị xấp xỉ e = 2,718254, đúng đến 4 chữ số thập phân.

Ví dụ khác, giả sữ ta muốn tính $\sin 10^0 = \sin(\pi/18)$ đúng đến 5 chữ số thập phân. Áp dụng khai triển Maclaurin cho hàm số sinx hội tụ với mọi x, ta được:

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots$$

Suy ra: $\sin(\pi/18) = \pi/18 - (\pi/18)^3/3! + (\pi/18)^5/5! - \ldots$

$$= 0{,}174352 - 0{,}000886 + 0{,}000001 - \ldots$$

Chú ý số hạng thứ ba không ảnh hưởng đến chữ số thập phân thứ năm, do đó, lấy hai số hạng đầu của khai triển, ta được giá trị của $\sin 10^0$ gần đúng đến 5 chữ số thập phân là :

$$\sin 10^0 = 0{,}17365$$

Thêm một ví dụ nữa, ta thử dùng khai triển để tính giá trị gần đúng của tích phân $\int_0^1 \sin x^2 dx$

Đặt $z = x^2$. Dùng khai triển Maclaurin, ta được :

$$\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! - \ldots$$

Suy ra

$$\sin x^2 = x^2 - x^6/3! + x^{10}/5! - \ldots$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x^6/3! + x^{10}/5! - \ldots)\, dx$$

$$= [x^3/3 - x^7/42 + x^{11}/1320] \quad \text{(xấp xỉ)}$$

$$= 0{,}3333 - 0{,}0238 + 0{,}0008 = 0{,}3103$$

Phép tính phi thường giá trị của số π đến hơn nửa triệu chữ số thập phân vào năm 1967 được thực hiện bằng chuỗi số lũy thừa với máy tính phôi thai của thời ấy. Khám phá này của Taylor và Maclaurin xứng đáng được vinh danh là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TÓAN HỌC.

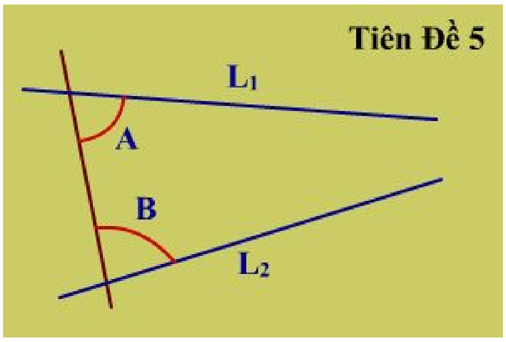
xem tiểu sử Taylor

xem tiểu sử Maclaurin

26. SỰ GIẢI PHÓNG CỦA HÌNH HỌC (1)

Chúng ta giờ đây sẽ kể lại hai bước phát triển toán học cách mạng và nổi bật xảy ra trong nửa đầu thế kỷ 19. Thứ nhất là sự phát hiện, khoảng 1829, về một hình học tự tương thích rất khác biệt với môn hình học Euclid vốn rất thân thiết; thứ hai là sự phát hiện, năm 1843, về một đại số khác biệt cơ bản với đại số quen thuộc của số thực. Mỗi bước phát triển này xứng đáng được vinh danh là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TÓAN HỌC, và với mỗi sự kiện, chúng ta sẽ dành hai bài tương xứng với tầm quan trọng của chúng. Trong mỗi trường hợp cách tiếp cận của chúng ta chủ yếu là tính lịch sử, bởi vì mỗi bước phát triển liên quan đến những ý tưởng toán học nền tảng, và một sự am hiểu chân thật các ý tưởng không thể có được nếu không phân tích về nguồn gốc của chúng.

Bước đầu tiên của phát triển đã tạo ra một trong những chiến công vĩ đại nhất trong lịch sử phát triển tư tưởng nhân loại. Như một số chuyện hấp dẫn liên quan đến sự tiến hóa của toán học, người ta tìm thấy sự bắt đầu của nó có gốc rễ ngay từ thời xa xưa của Hi lạp cổ đại, chính xác là từ việc phê phán tiên đề thứ 5 về quan hệ song song trong bộ *Các Yếu Tố* của Euclid.



Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khác và tạo với chúng hai góc trong cùng bên nhỏ hơn 2 góc vuông, thì hai đường thẳng ấy khi kéo dài sẽ cắt nhau tại một điểm về phía miền chứa hai góc nói trên.

Triết gia tân-Platon sống vào thế kỷ thứ 5 là Proclus, trong quyển *Phê phán Euclid*, đã bảo rằng tiên đề này đã bị công kích ngay từ lúc đầu. Ngay cả khi chỉ đọc thoáng qua người ta cũng nhận thấy một sự khác biệt giữa tiên đề này với 4 tiên đề khác của Euclid.

1. Qua hai điểm cho trước luôn kẻ được một đường thẳng.

2. Một đường thẳng có thể kéo dài liên tục về cả hai phía.

3. Một đường tròn có thể dựng được nếu biết tâm là điểm cho trước và qua một điểm thứ hai cho trước.

4. Mọi góc vuông đều bằng nhau.

5. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khác và tạo với chúng hai góc trong cùng bên nhỏ hơn 2 góc vuông, thì hai đường thẳng ấy khi kéo dài sẽ cắt nhau tại một điểm về phía miền chứa hai góc nói trên.

Tiên đề 5 này dài dòng và có vấn đề chứ không súc tích và dễ hiểu như 4 tiên đề kia, cũng như không có vẽ hiển nhiên như bản chất mà tiên đề phải có. Nếu xét kỹ hơn thì tiên đề này chính là mệmh đề đảo của định lí I. 17. Không ngạc nhiên khi có nhiều người thấy nó có vẽ là một định lí hơn là một tiên đề. Hơn nửa Euclid hình như cũng sử dụng nó một cách miễn cưỡng, vì mãi đến Định lí I. 29 ông mới bắt đầu dùng đến nó.

Vấn đề là nếu chúng ta cảm thấy khổ sở vì một tiên đề nào đó trong một hệ thống lí luận của một môn học nào đó thì có hai điều ta có thể làm là – hoặc thay thế tiên đề bằng một tiên đề khác nhưng dễ chấp nhận hơn, hoặc là loại bỏ nó bằng cách chứng minh nó chỉ là một định lí có thể suy ra từ các định lí hay tiên đề khác của hệ thống. Những nỗ lực đi về cà hai hướng này đã được thực hiện từ thời xa xưa.

Sau đây là vài tiên đề được đề nghi thay thế cho tiên đề thứ 5 đã xuất hiện theo thời gian qua:

1. Tồn tại một cặp đường thẳng đồng phẳng luôn cách đều nhau ở mọi nơi.

2. Qua một điểm cho trước không thuộc đường thẳng có thể kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng ấy.

3. Tồn tại một cặp tam giác đồng dạng và không bằng nhau.

4. Nếu trong một tứ giác có một cặp cạnh đối bằng nhau và các góc cùng kề với cạnh thứ ba là góc vuông, thế thì hai góc còn lại cũng vuông.

5. Nếu một tứ giác có ba góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.

6. Tồn tại ít nhất một tam giác có tổng ba góc bằng 2 góc vuông.

7. Qua một điểm bên trong một góc nhỏ hơn 60^0 luôn có thể kẻ được một đường thẳng cắt cả hai cạnh của góc đó.

8. Qua ba điểm không thẳng hàng có thể dựng được một đường tròn .

9. Không có giới hạn trên của diện tích tam giác .

Trong các ứng viên thay thế này, tiên đề được ưa chuộng nhất và được trình bày trong hầu hết giáo trình toán trung học là tiên đề số 2, do nhà vât lý và toán học người Scotland là John Playfair (1748-1819) cổ xúy vì tiên đề này đã được Proclus đề xướng từ thế kỷ thứ 5. Rõ ràng tiên đề thay thế này khá hơn nhiều so với các đề nghị khác khá rối rắm và không hiển nhiên hay tốt hơn chút nào so với tiên đề gốc.

Với các tiên đề thay thế ta có một cụm bài tập thú vị và đầy thử thách là chứng minh chúng tương đương với tiên đề gốc, nghĩa là ta chứng minh rằng chúng là định lí nếu ta sử dụng các tiên đề của Euclid, và ngược lại nếu dùng chúng cùng với 4 tiên đề khác của Euclid , ta có thể chứng minh tiên đề số 5 như một định lí.

Qua hàng thế kỷ, các nỗ lực để rút ra tiên đề 5 của Euclid từ các tiên đề khác của ông nhiều vô số kể. Và tất cả đều đi đến thất bại, sớm hay muộn người ta cũng tìm ra là cách chứng minh ấy đều dựa vào một giả định ngầm tương đương với chính tiên đề ấy. Cách chứng minh sớm nhất theo như ta biết là của Claudius Ptolemy (khoảng 150 sau Công nguyên). Chính Proclus đã phát hiện ra khiếm khuyết trong cách chứng minh của Ptolemy vì ông này đã ngầm sử dụng giả định rằng qua một điểm không thuộc một đường thẳng cho trước có thể kẻ được một đường thẳng duy nhất song song với đường thẳng ấy, đây chính là tiên đề thay thế của Playfield.

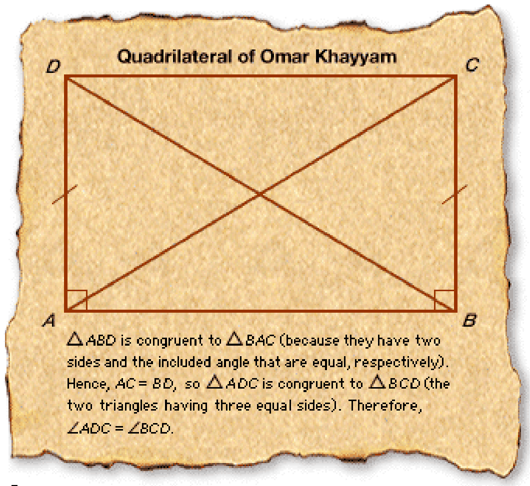
Proclus cũng đưa ra cách chứng minh của ông nhưng lần này tới phiên ông lại vô tình ngầm chấp nhận giả định 1 ở trên đây mà không biết, và giả định này có thể được chứng minh là tương đương với tiên đề số 5.

Trong thời Phục Hưng, nỗ lực làm mới lại tiên đề số 5 là một kích thích quan trọng cho việc phát triển hình học ở Âu châu trong thời kì ấy. Nhưng các nỗ lực này cuối cùng cũng chịu chung số phận như các nỗ lực trước đây, mãi cho đến khi Girolamo Saccheri bắt tay tham gia vào việc nghiên cứu vào năm 1733.

Saccheri sinh tại San Remo năm 1667, chưa đến 23 tuổi đã là tu sĩ chính thức của dòng tu Jesuit. Ông dành hết thời gian của đời mình vào việc dạy học ở các trường đại học khác nhau. Trong khi dạy về tu từ học, triết lý và thần học ở đại học Jesuit ở thành phố Milan, Saccheri đọc được quyển *Các Yếu Tố* của

Euclid và bị mê hoặc bởi phép chứng minh phản chứng đầy sức mạnh của. Sau đó, trong thời gian dạy triết lý ở Turin, Saccheri cho in tác phẩm *Logica demonstrative* , trong đó sự cách tân chính yếu là áp dụng phép chứng minh phản chứng vào việc nghiên cứu luận lí hình thức. Vài năm sau, khi là giáo sư toán tại Đại học Pavia, ông nảy ra ý định dùng phép chứng minh phản chứng để nghiên cứu tiên đề số 5 của Euclid. Ông đã chuẩn bị đầy đủ tư thế vào công trình lớn lao này sau nhiều năm dạy logic, cũng như đã tìm hiểu những thất bại của nhiều nhà toán học đi trước.

Hướng đi của Saccheri là hoàn toàn mới khi áp dụng phép chứng minh phản chứng, trong đó ông là người đầu tiên có ý tưởng tìm hiểu những kết quả có được nếu ta từ chối chấp nhận tiên đề này là đúng. Kết quả của công trình được ông trình bày trong tác phẩm nhỏ mang tên *Euclides ab naevo vindicatus* (Euclid đã loại ra mọi khuyết điểm), được xuất bản ở Milan năm 1733, chỉ một vài tháng trước khi ông mất. Trong công trình này, ông chấp nhận 28 định lí đầu tiên của *Các Yếu Tố*, mà như đã nói, các định lí này không dùng đến tiên đề số 5. Với sự trợ giúp của các định lí này ông tiến hành nghiên cứu hình ông gọi là *isosceles birectangle* (nhị vuông cân), đó là một tứ giác ABDC có AD = BC và góc A và B đều vuông. Tứ giác này cũng được gọi là tứ giác Omar Khayyam (1048-1131) vì nhà thi sĩ - toán học Ả rập cũng đã nghiên cứu trước đó mấy trăm năm. Bằng cách vẽ đường chéo AC và BD và dùng điều kiện bằng nhau của hai tam giác (có mặt trong số 28 định lí đầu), Saccheri dễ dàng chứng minh được góc C và D cũng bằng nhau. Nhưng không có gì đoan chắc về độ lớn của hai góc này. Lẽ dĩ nhiên, nếu dùng tiên đề số 5 thì chứng minh được hai góc này là vuông, nhưng Saccheri đã không chấp nhận nó.



Với một đầu óc phóng khoáng, ông nêu ra ba giả thuyết sau đây đều có thể xảy ra: hai góc này đều vuông, đều nhọn hay đều tù. Kế hoạch là loại bỏ hai trường hợp sau bằng cách chứng minh phản chứng rằng nếu chúng đúng sẽ dẫn đến một điều trái với chân lí đã được biết, do đó giả thuyết đầu tiên phải đúng. Và giả thuyết đầu tiên này thì tương đương với tiên đề số 5. Bằng cách này tiên đề song song được thiết lập và như vậy sự khiếm khuyết của giả định này mà Euclid đưa ra đã bị loại trừ.

Nhiệm vụ loại bỏ giả thuyết góc nhọn và tù hóa ra không đơn giản chút nào. Bằng kỹ năng hình học điêu luyện và phép suy luận sâu sắc tinh tế, Saccheri thiết lập được một số định lí, trong đó những định lí sau là quan trọng nhất:

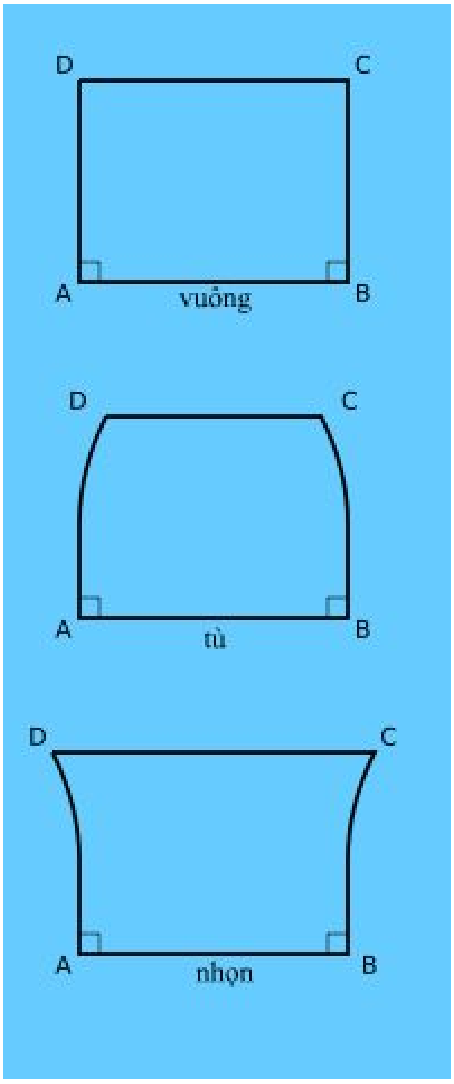
1. *Nếu một giả thuyết nào đúng cho một tứ giác nhị vuông cân thì nó cũng đúng cho mọi tứ giác nhị vuông cân khác*
2. *Với giả thuyết góc vuông, tù hay nhọn, ta được tổng ba góc tam giác theo thứ tự là bằng hai*

vuông, lớn hơn hay nhỏ hơn hai vuông.

3. Nếu tồn tại một tam giác có tổng bằng hai vuông, lớn hơn hay nhỏ hơn hai vuông, thì suy ra theo thứ tự giả thuyết góc vuông, góc tù hay góc nhọn cũng đúng.

4. Cho một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng, tùy theo giả thuyết là góc vuông, góc tù hay góc nhọn, theo thứ tự, ta có thể dựng được duy nhất một, không hay vô số đường qua điểm đó và không cắt đường thẳng đã cho.

5. Tập hợp đầu mút thứ nhất của một đoạn thẳng có độ dài không đổi luôn vuông góc với một đường thẳng cho trước tại đầu mút thứ hai, tuỳ theo giả thuyết là góc vuông, góc tù hay góc nhọn, theo thứ tự là một đường thẳng, một đường cong lồi, hay lõm đối với đường thẳng cho trước.



Cũng ngầm công nhận như Euclid đã làm khi chứng minh định lí I. 16 rằng những đường thẳng thì vô hạn, Saccheri có thể loại bỏ được giả thuyết về góc tù, nhưng với góc nhọn thì coi bộ khó khăn hơn nhiều. Sau khi thu hoạch được nhiều định lí mà bây giờ đã trở thành kinh điển và được gọi là hình học phi Euclid, để loại bỏ giả thuyết góc nhọn, Saccheri rụt rè gán ép một kết luận mâu thuẫn gượng gạo, không thuyết phục bằng cách dựa vào những khái niệm mơ hồ về các yếu tố ở vô tận. Sau bao nhiêu công lao nghiêm cẩn đạt được đến giờ, khó có thể tin rằng chính Saccheri thật sự tự thuyết phục được mình cái kết thúc hời hợt này. Nếu ông không quá hăng hái cố đưa ra một mâu thuẫn ở đây, và thay vào đó, can đảm công nhận là mình đã thất bại trong việc tìm ra một kết quả mâu thuẫn, thì ngày này không nghi ngờ gì nữa, ông chắc chắn được vinh danh là người đã khám phá ra một ngành hình học mới phi Euclid.

Công trình ông hình như ít được người đương thời biết đến và sớm bị lãng quên. Chỉ khi đến năm 1889, một người đồng hương là Beltrami, đã làm sống lại nó sau khi đã dịch tác phẩm của ông ra Anh ngữ.

Năm 1766, ba mươi ba năm sau khi xuất bản công trình của Saccheri, Lambert (1728-1777), nhà toán học Hòa Lan, có viết một nghiên cứu tựa là *Die Theorie der Parallellinien*, nhưng chỉ được in 11 năm sau khi ông mất. Lambert chọn hình phát xuất là tứ giác tam vuông tức tứ giác có ba góc vuông. Cũng như Saccheri, Lambert đi đến giả thuyết góc cuối cùng vuông, tù hay nhọn, và hơn nữa, phần dư của góc tù so với góc vuông cũng như phần thiếu của góc nhọn so với góc vuông thì tỉ lệ với diện tích tam giác. Ông cũng phát hiện ra sự giống nhau giữa hình học với giả thuyết góc tù giống với hình học trên mặt cầu.

Cũng như Saccheri, Lambert loại bỏ được giả thuyết góc tù bằng cách thừa nhận ngầm như Saccheri là đường thẳng có thể kéo dài đến vô tận, nhưng các kết luận về giả thuyết góc nhọn không rõ ràng và không thỏa mãn. Có lẽ vì thế mà ông đã không cho in công trình của mình khi còn sống. Chỉ sau khi ông qua đời, các bạn bè mới tập hợp các công trình và cho xuất bản với hình thức di cảo.

Sau Saccheri và Lambert còn có nhà toán học Pháp Legendre (1752-1833), nhưng ông cũng không đóng góp gì nhiều hơn so với Saccheri một trăm năm trước, nhất là khoảng thời gian đó, trong một xứ sở tương đối cách biệt với thế giới học thuật và khoa học tây phương, một nhà toán học Nga đã đạt được một bước tiến có ý nghĩa, mà sự táo bạo và quan trọng của nó đã vượt xa bất cứ gì Legendre đã tìm được.

xem thêm về Saccheri

xem tiểu sử Lambert

xem tiểu sử Legendre

27. SỰ GIẢI PHÓNG CỦA HÌNH HỌC (2)

Trong bài trước, chúng ta thấy rằng, dù sau một nỗ lực kéo dài, Saccheri, Lambert và Legendre vẫn không thể tìm ra mâu thuẫn trong giả thuyết của góc nhọn. Không có gì ngạc nhiên khi họ đi đến kết quả này vì bây giờ chúng ta biết rằng tiên đề song song không thể suy ra từ các tiên đề và định lí đã có của hình học Euclid mà là độc lập với các tiên đề này. Phải có một óc tưởng tượng phi thường mới nghĩ đến khả năng đó, vì trong hơn hai ngàn năm, trí tuệ bị trói buộc trong thành kiến là chỉ có hình học Euclid là hình học thực sự duy nhất và một hệ thống hình học nào ngược với nó đều là không phù hợp.

Người đầu tiên nghi ngờ tính độc lập của tiên đề song song là Gauss (1777-1855), nhà toán học Đức, Bolyai (1802-1860), nhà toán học Hung, và Lobachevsky (1793-1856), nhà toán học Nga. Ba người này tiếp cận tiên đề song song một cách độc lập theo hướng phát biểu của Playfield bằng cách xét ba khả năng: *Qua một điểm cho trước không ở trên một đường thẳng cho trước có thể kẻ được chỉ một, không, hay nhiều hơn một đường thẳng song song với đường thẳng cho trước đó.* Ba trường hợp này tương đương với giả thuyết góc vuông, góc tù, và góc nhọn. Với giả định như những người đi trước là đường thẳng có thể kéo dài đến vô cùng, trường hợp thứ hai dễ dàng bị loại bỏ. Việc bất thành khi loại bỏ trường hợp thứ ba, tuy nhiên, khiến mỗi người trong họ ngờ vực, tại những thời điểm khác nhau, tồn tại một hình học khác, có vẻ hơi kì cục nhưng thỏa mãn giả thuyết thứ ba, và người này, hoàn toàn không biết đến công việc của hai người kia, đã phát triển môn hình học mới này chỉ để thỏa mãn mối hứng thú của trí tuệ.

Gauss có lẽ là người đầu tiên thực sự nghĩ đến một hình học phi Euclid. Mặc dù ông chiêm nghiệm rất nhiều về vấn đề này ngay từ thời còn trẻ, nhưng chắc chắn chỉ khi đến đầu những năm 30 tuổi ông mới bắt đầu ngờ vực về tính độc lập của tiên đề song song đối với các tiên đề khác. Khổ thay, ông ta thất bại, và đến cuối đời không cho in phát hiện nào cả. Chỉ sau khi ông mất, qua thư từ để lại trao đổi với các bạn thân, chúng ta mới biết được các kết luận mới mẻ của ông. Mặc dù không chịu cho xuất bản những đóng góp toán học của mình, ông kêu gọi và khuyến khích người khác lao vào nghiên cứu vấn đề, và chính ông là người đặt tên cho môn hình học là phi Euclid.

xem tiểu sử Gauss

Hiển nhiên người thứ hai thấy trước được môn hình học phi Euclid này là Janos Bolyai, một viên chức Hung trong quân đội Áo và là con nhà toán học Farkas Bolyai, một người bạn lâu năm của Gauss. Không nghi ngờ gì nữa, Bolyai đã nhận từ cha mình nguồn động viên để bắt tay vào việc nghiên cứu tiên đề song song ngay từ rất sớm. Từ năm 1823 Bolyai đã hiểu rõ bản chất của bài toán đang đặt ra cho mình, và một bức thư gởi đến cha trong năm đó đã nói lên nhiệt tình ông dành cho thách thức trước mặt. Trong thư ông biểu lộ quyết tâm in cho bằng được một tiểu luận về lý thuyết đường song song ngay khi có thời gian và cơ hội sắp xếp các tìm tòi một cách mạch lạc, và ông hồ hỡi phát biểu, “Con đã phát hiện ra những điều quá phi thường khiến con phải choáng váng . . . Từ không có gì, con đã sáng tạo ra một vũ trụ mới mẻ và kì lạ.” Cha ông thúc giục ông cho in tiểu luận càng nhanh càng tốt, và hỗ trợ con trai bằng cách hứa in công trình này chung với tác phẩm của mình đang sắp hoàn tất trong phần phụ lục và để tên riêng. Nhưng công việc tiến hành chậm hơn là chàng trai nghĩ nhiều, và cuối cùng vào năm 1829, anh cũng trao được bản thảo cho thân phụ, và ba năm sau, vào 1832, tiểu luận xuất hiện là phần phụ lục dày 26 trang trong tác phẩm của người cha. Bolyai sau đó không xuất bản thêm phát hiện gì nữa về lãnh vực này, nhưng để lại nhiều trang bản thảo liên hệ tới vấn đề.

Mặc dù Gauss và Bolyai được công nhận là những người đầu tiên thai nghén hình học phi Euclid, nhưng chính nhà toán học Nga Lobachevsky mới là người đầu tiên cho in một tác phẩm có hệ thống về phát hiện của mình về hình học này. Lobachevsky trải phần lớn cuộc sống của mình ở đại học Kazan, lúc đầu là sinh viên, về sau là giáo sư toán, và cuối cùng là hiệu trưởng, và công trình sớm sủa của ông về hình học phi Euclid được xuất bản năm 1829-1830 trong tạp chí của trường, vài năm trước tiểu luận của Bolyai xuất hiện. Bài viết của ông ít gây chú ý ở Nga và, vì nó viêt bằng tiếng Nga, cho nên càng không gây chú ý nào ở những phần khác của Âu châu. Lobachevsky giới thiệu công trình mình với các nhà xuất bản khác. Để đến được số độc giả đông hơn, ông in vào năm 1840 một cuốn sách nhỏ bằng tiếng Đức tựa là *Các Nghiên Cứu Hình Học Về Lý Thuyết Đường Song Song*, và rồi sau đó, năm 1855, một năm trước khi mất và sau khi đã mù, ông cho in bằng tiếng Pháp một tiểu luận rút gọn và cuối cùng có tên *Pangeométrie*. Công trình của Lobachevsky chỉ đến tay Gauss khi có bản in tiếng Đức vào năm 1840, còn Bolyai chỉ biết đến nó vào năm 1848. Ông thay thế tiên đề song song bằng tiên đề sau :

xem tiểu sử Bolyai

"Qua một điểm cho trước không nằm trên một đường thẳng cho trước, tồn tại ít nhất hai đường thẳng song song với đường thẳng ấy"

Ông phát triển nhiều đẳng thức lượng giác trong hình học của mình và chứng tỏ rằng khi tam giác nhỏ dần thì các đẳng thức lượng giác ấy càng giống với các đẳng thức lượng giác quen thuộc trong hình học Euclid.

Xem tiểu sử Lobachevski

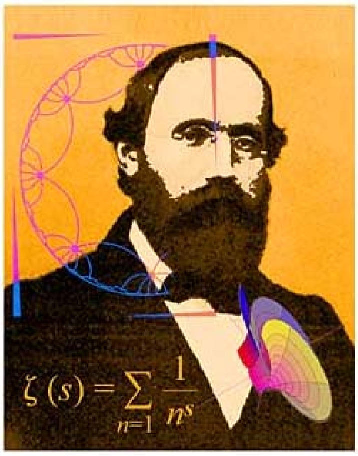
Lobachevsky không còn sống để thấy công trình mình được ca ngợi khắp mọi nơi, nhưng hình học phi Euclid mà ông phát triển ngày này được mang tên ông, hình học Lobachevsky, và tước hiệu "Copernic của hình học" đã được gán cho ông.

Vài năm sau sự xuất hiện của công trình Lobachevsky và Bolyai, thế giới toán học mới tỏ ra quan tâm nhiều với hình học phi Euclid, và qua phải vài thế hệ nữa sự phát hiện đó mới được đánh giá đầy đủ. Một vấn đề nữa phải được hoàn thiện là chứng minh cho được tính tương thích nội tại của hình học mới. Mặc dù Lobachevsky và Bolyai không gặp mâu thuẫn nào trong sự nghiên cứu và phát triển của mình về hình học này dựa vào giả thuyết góc nhọn, nhưng vẫn còn có khả năng một mâu thuẫn hoặc một sự không tương thích sẽ nãy sinh nếu ta nghiên cứu xa hơn, sâu hơn. Sự độc lập thực sự của tiên đề song song với các tiên đề khác không thể công nhận mà không nghi vấn đến khi nào mà tính tương thích của giả tuyết góc nhọn được thiết lập. Những chứng minh không lâu sau đó đã được Beltrami, Cayley, Klein, Poincaré . . . cung cấp. Phương pháp là xây dựng một mô hình của hình học mới bên trong hình học Euclid, sao cho sự phát triển trừu tượng của giả thuyết góc nhọn sẽ được gán cho một biểu thị trong không gian Euclid. Như thế bất cứ sự không tương thích nào trong hình học phi Euclid sẽ bộc lộ một sự không tương thích trong hình học Euclid. Cái bằng chứng tương thích là loại bằng chứng tương thích tương đối; hình học phi Euclid Lobachevsky sẽ tương thích nếu hình học Euclid tương thích, và lẽ dĩ nhiên, mọi người đều tin tưởng hình học Euclid là tương thích.

Những thành quả của sự tương thích của hình học phi Euclid không chỉ là sự giải quyết rốt ráo vấn nạn tiên đề về song song, mà quan trọng hơn, là sự giải phóng của hình học khỏi khuôn mẫu truyền thống. Các tiên đề hình học, đối với các nhà toán học, giờ đây chỉ là những giả thuyết mà chân lý hoặc ngụy lý vật chất không phải là mối quan tâm của họ, miễn là chúng tương thích với nhau. Một tiên đề từ đây không cần phải " hiển nhiên" hoặc "dễ thấy", hoặc phù hợp với kinh nghiệm ở không gian vật lý mà nhà toán học đang sống. Toán học từ rày chỉ là một sáng tạo ngẫu hứng của trí tuệ con người chứ không phải là một sản phẩm do nhu cầu thực tại của thế giới ngoại giới.

Sự sáng tạo của hình học phi Euclid, bằng cách đạp đổ tín điều truyền thống và phá vỡ thói quen suy nghĩ hàng thế kỉ, đánh một đòn trí mạng vào cái gọi là quan điểm chân lý tuyệt đối của toán học. Và như lời của Georg Cantor, "Tinh túy của toán học nằm trong tính tự do của nó".

Chúng ta đã thấy rằng giả thuyết góc tù đã bị loại bỏ bởi tất cả những nhà toán học tiên phong nghiên cứu về tiên đề song song bởi vì nó mâu thuẫn với giả định là một đường thẳngcó độ dài vô cùng. Sự công nhận một hình học phi Euclid thứ hai, xây dựng trên giả thuyết góc tù, chỉ được nghĩ đến khi Riemann (1826-1866) vào năm 1854 lí giải sự khác nhau giữa khái niệm vô hạn và vô cùng (boundlessness và infiniteness). Mặc dù tiên đề 2 của Euclid công nhận rằng một đường thẳng có thể kéo dài mải mải về hai phía, nhưng không ám chỉ là độ dài của nó là vô cùng mà chỉ là nó vô hạn. Lấy ví dụ một cung của một đường tròn lớn nối hai điểm trên mặt cầu. Cung này có thể kéo dài ra mải mải dọc theo đường tròn lớn nên có thể coi là vô hạn nhưng rõ ràng độ dài nó không phải là vô cùng.



Xem thêm Riemann

Đường thẳng cũng mang khái niệm như vậy, nghĩa là sau khi được kéo dài, nó có thể trở lại thành chính nó. Sau khi đã phân biết hai khái niệm này, Riemann xây dựng một hình học mới thỏa mãn giả thuyết góc tù bằng cách đổi lại các tiên đề 1, 2, 5 như sau:

1'. Hai điểm phân biệt xác định ít nhất một đường thẳng.

2'. Một đường thẳng thì vô hạn.

5'. Bất kì hai đường thẳng nào trong mặt phẳng cũng cắt nhau.

Hình học phi Euclid thứ hai này gọi là hình học Riemann.

Nếu đọc cẩn thận những phát biểu của Euclid trong tiên đề 1, 2, (xem bài 26), ta sẽ thấy rằng nội dung không khác với tiên đề 1’ và 2’, mặc dù Euclid ngầm ám chỉ nhiều hơn thế. Ông ám chỉ tiên đề 1 tính duy nhất của đường thẳng qua hai điểm và ám chỉ tiên đề 2 sự vô cùng của đường thẳng bởi vì ông sử dụng những tiên đề này theo các nghĩa như thế, mặc dù phát biểu hai tiên đề này của ông không được rõ ràng.

Với sự giải phóng hình học của Lobachevsky và Riemann khỏi những ràng buộc truyền thống, con đường đã mở cho sự sáng tạo của một loạt các hình học thú vị khác, tất cả đều dựa trên các bộ tiên đề khác ít nhiều với tiên đề của Euclid. Trong số này phải kể đến hình học phi Archiemedes, hình học phi Desargue, hình học phi Riemann, hình học hữu hạn (trong đó chỉ chứa một số điểm, đường hữu hạn) . . . Những hình học mới này tưởng là trừu tượng và vô dụng nhưng thật ra cũng tìm được tiếng nói trong thế giới thực tại. Ví dụ, trong khi nghiên cứu về thuyết tương đối, Einstein tìm ra rằng ông phải công nhận hình học phi Euclid mới có thể mô tả được thế giới vật lý mà thuyết này hoạt động- đó chính là hình học Riemann mà ta đã nói ở trên. Trong không-thời gian của ông, đường thẳng là đường truyền của ánh sáng, nếu ta tạo một tam giác bằng 3 tia sáng nối 3 điểm trong vũ trụ các thiên hà thì tổng ba góc của tam giác lấy lớn hơn 180^o. Hiện tượng này đã được các nhà thiên văn kiểm chứng vào năm 1919. Thêm nữa, một nghiên cứu tiến hành trong năm 1947 về không gian thị giác (không gian được quan sát một cách tâm lí bởi những người có thị giác bình thường) đưa đến kết luận là không gian này chỉ có thể mô tả chính xác nhất bằng hình học Lobachevsky. Cũng nhớ rằng trong hình học Lobachevsky, tổng ba góc của tam giác nhỏ hơn 180^o

Chắc chắn sự phát hiện cách mạng của Lobachevsky và Riemann về hình học phi Euclid được xứng đáng vinh danh là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TÓAN HỌC, và chúng ta có thể hiểu tại sao Cassius Keyser đã tuyên bố là tiên đề song song của Euclid “có lẽ là một phát biểu ngắn ngủi và lừng danh nhất trong lịch sử khoa học.”

Xem thêm về hình học phi Euclid

28. SỰ GIẢI PHÓNG CỦA ĐẠI SỐ (1)

Trong bài 26, chúng ta đã nói rằng có hai sự phát triển tóan học có tính cách mạng xảy ra trong nửa đầu thế kỷ 19. Thứ nhất là sự phát hiện của hình học phi Euclid xảy ra khoảng 1829 đã được thảo luận trong hai bài vừa qua. Giờ đây chúng ta bàn đến cuộc phát hiện thứ hai- sự phát hiện của môn đại số không truyền thống xảy ra vào năm 1843. Chúng ta sẽ thây rằng, tương tự như cuộc giải phóng hình học từ hình học cổ truyền của Euclid, cuộc giải phóng thứ hai nhằm đem đại số thoát khỏi môn đại số truyền thống của hệ thống số thực.

Trong sự giải phóng của hình học có nguồn gốc từ xa xưa qua khảo sát lại tiên đề song song của Euclid, sự giải phóng đại số bắt nguồn từ sự nhận ra, đầu tiên bởi nhà toán học người Anh trong nửa đầu thế kỷ 19, sự tồn tại của cấu trúc đại số.

Thế nào là thuật ngữ "cấu trúc đại số". Trong khi khảo sát tính số học của số nguyên dương, người ta gặp phải hai phép toán, gọi là "phép công" và "phép nhân". Những phép toán này được gọi là phép toán nhị cấp- đó là ứng với một cặp số nguyên dương a và b ta liên kết cặp số nguyên duy nhất c và d, theo thứ tự gọi là tồng và tích của a và b, và kí hiệu: c = a + b, d = a x b.

Hai phép toán này được thực hiện trên tập hợp những số nguyên dương, và chứa những tính chất cơ bản sau: Với mọi số nguyên dương a, b, c, d, ta có:

1. a + b = b + a (tính giao hoán của phép cộng)
2.a x b = b x a (tính giao hoán của phép nhân)
3. (a + b) + c = a + (b + c) (tính kết hợp của phép cộng)
4. (a x b) x c = a x (b x c) (tính kết hợp của phép nhân)
5. a x (b + c) = a x b + a x c (tính phân phối của phép nhân đối với phép cộng)

Trong đầu thế kỷ 19, đại số vẫn còn được coi là một môn số học được biểu diễn bằng ký hiệu. Nghĩa là, thay vì ta tính toán với các số cụ thể, trong đại số ta dùng những chữ để thay bằng các con số. Thật ra, đây vẫn còn là quan điểm thường được dạy trong các trường trung học ngày nay.

Năm tính chất nói trên luôn đúng trong đại số các số nguyên dương. Nhưng vì các tính chất này đã được kí hiệu hóa, do đó ta có thể cho rằng chúng cũng có thể áp dụng cho những phần tử khác hơn là các số nguyên dương, miễn là ta định nghĩa các phép tính nhị cấp liên hệ. Đây chính là trường hợp mà ta liệt kê dưới đây trong tập hợp S với các hai phép tính kí hiệu là + và x:

(a) Cho S là tập hợp mọi số nguyên chẵn, và gọi + và x là các phép tính cộng và nhân thông thường.

(b) Cho S là tập hợp các số hữu tỉ, và gọi + và x là các phép tính cộng và nhân thông thường của số thực.

(c) Cho S là tập hợp các số thực có dạng m + n $\sqrt{2}$ trong đó m và n là các số nguyên, và gọi + và x là các phép cộng và nhân thông thường các số thực.

(d) Cho S là tập hợp các sồ nguyên Gaussian (tức các số phức m + ni với m, n là các số nguyên và i = $\sqrt{-1}$, và gọi + và x là các phép cộng và nhân thông thường các số phức.

(e) Cho S là tập hợp các cặp số (m, n) các số nguyên, và định nghĩa:

(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) và (a, b) x (c, d) = (ac, bd).

(f) Gọi S là tập hợp các cặp số (m, n) các số nguyên và định nghĩa:

(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) và (a, b) x (c, d) = (ac - bd, ad + bc).

(g) Gọi S là tập hợp hai phần tử phân biệt m và n, ta định nghĩa:

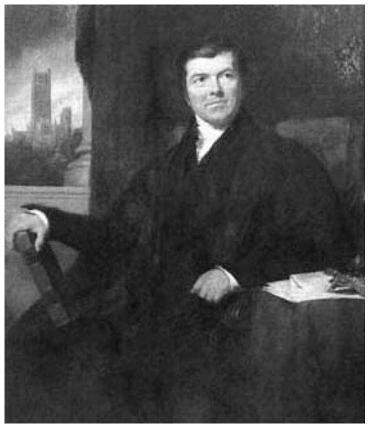
m + m = m x m = m

m + n = n + m = m x n = n x m = m

n + n = n x n = n

(h) Gọi S là tập hợp các tập con các điểm trong mặt phẳng, và gọi a + b là phần hội của a và b, và a x b là phần giao của a và b.

Bảng danh sách trên có thể kéo dài mãi mãi, cho ta thấy rằng năm tính chất trên rất phổ biến trong các hệ thống các phần tử không phải là số. Năm tính chất trên và các hệ quả của chúng tạo thành một cấu trúc đại số có thể áp dụng cho nhiều hệ thống khác. Như vậy có một cấu trúc đại số chung có thể gán cho nhiều hệ thống. Năm tính chất trên có thể coi như là các tiên đề cho một loại cấu trúc, và bất cứ định lí nào rút ra được từ chúng có thể áp dụng cho mọi hệ thống nếu nó thỏa mãn năm tiên đề trên. Đứng trên quan điểm này thì đại số đã bị cắt đứt khỏi số học trói buộc nó và trở thành một nghiên cứu xây dựng trên giả thiết thuần túy hình thức.



Những tia sáng sớm sủa nhất của quan điểm hiện đại này lần đầu tiên xuất hiện ở Anh, trong nửa đầu thế kỷ 19, với công trình của George Peacock (1791-1858), tốt nghiệp tại Cambridge và giảng dạy tại đó. Peacock là một trong người đầu tiên nghiên cứu nghiêm túc những nguyên tắc nền tảng của đại số, và trong năm 1830, ông cho in tác phẩm *Khảo luận về Đại số học*, trong đó ông thử tiếp cận đại số một cách lôgic theo lối tiên đề tương tự như Euclid đã làm với hình học, và nhờ thế ông được mệnh danh là " Euclid của đại số học."

Peacock phân biệt giữa cái mà ông gọi là "đại số số học" và "đại số biểu tượng". Ông coi đại số số học là ngành nghiên cứu thoát thai từ cách dùng kí hiệu để chỉ những số thập phân dương thông thường, cùng với những kí hiệu cho các phép tính, như phép cộng và trừ. Nhưng, trong đại số số học, một số phép toán bị giới hạn phạm vi thực hiện, Chẳng hạn phép trừ, a - b, chỉ thực hiện được khi a > b. Đại số biểu tượng của Peacock, trái lại, cũng công nhận những phép toán của đại số số học nhưng không biết đến các giới hạn của chúng. Do đó phép trừ trong "đại số biểu tượng" luôn luôn thực hiện được.

Những người đương thời của Peacock phát triển và đẩy xa các nghiên cứu của ông gần với khái niệm hiện đại của đại số ngày nay. Như Gregory (1813-1844) in một bài viết trong đó tính giao hoán và phân phối của phép toán đại số được đào sâu. Năm 1840, De Morgan (1806-1871), cũng người Anh, phát triển nền tảng của đại số lên một tầm cao mới. Trường phái Anh lập tức lan truyền đến Âu châu, và trong năm 1867, nhà toán học Đức Hemann Hankel (1839-1873) đã nghiên cứu chúng một cách toàn diện. Nhưng trước đó, cũng có các nhà toán học như Hamilton, Grassmann đã cho xuất bản các khảo cứu vượt xa tầm quan trọng. Đưa đến một cuộc giải phóng đại số, theo cách tương tự như phát hiện của Lobachevsky và Bolyai đã làm đối với hình học phi Euclid. Công trình của họ có thể coi là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TÓAN HỌC, sẽ là nội dung trong bài tiếp theo.

Trước khi kết thúc, chúng ta sẽ nhắc lại các tiên đề về đại số hiện đại của một cấu trúc mà ta gọi là *trường thứ tự*.

Trường là tập hợp S những phần tử trang bị hai phép tính nhị cấp, kí hiệu là $\oplus$ và $\otimes$ thỏa mãn những tiên đề sau đây: Với mọi a, b, c thuộc S:

TĐ 1: $a \oplus b$ thuộc S.

TĐ 2: $a \otimes b$ thuộc S.

TĐ 3: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

TĐ 4: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

TĐ 5: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ và $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$

TĐ 6: S chứa một phần tử z (zero) sao cho: $a \oplus z = a$, với mọi a.

TĐ 7: S chứa một phần tử u (đơn vị) sao cho: $a \otimes u = a$, với mọi a.

TĐ 8: Với mọi phần tử a thuộc S, tồn tại một phần tử $\overline{a}$ thuộc S sao cho: $a + \overline{a} = z$.

TĐ 9: Nếu $c \otimes a = c \otimes b$ hoặc $a \otimes c = b \otimes c$ và $c \neq z$ thì $a = b$.

TĐ 10: Với mọi phần tử a thuộc S, tồn tại một phần tử a^{-1} thuộc S sao cho: $a \otimes a^{-1} = u$.

Nếu ngoài 10 tiên đề đó ra, hai tiên đề sau cũng thỏa, thì ta có trường thứ tự:

TĐ 11: Tồn tại một tập con P, không chứa z của S sao cho nếu $a \neq z$ thì chỉ có một phần tử và chỉ một hoặc a hoặc $\overline{a}$ thuộc P.

TĐ 12: Nếu a và b thuộc P, thế thì $a \oplus b$ và $a \otimes b$ thuộc P.

Định nghĩa 1: Các phần tử của P được gọi là những phần tử *dương* của S; mọi phần tử khác z và không dương gọi phần tử *âm*.

Định nghĩa 2 : Nếu $a \oplus \overline{b}$ dương thế thì ta viết: a $>$ b.

Tập hợp các tiên đề trên có phần nào rườm rà, mục đích là để phục vụ cho bài sau. Ví dụ, do tiên đề 2, ta chỉ cần phát biểu một luật phân phối trong tiên đề 5 thay vì hai. Chú ý là 5 tính chất cơ bản của phép cộng, nhân thông thường đều có mặt trong bộ tiên đề này, và ta có thể thấy ý nghĩa của các tiên đề khác khi vận dụng vào tập số thực. Ví dụ số z chính là số 0, số u là sô 1, số $\overline{a}$ chính là số - a , số a^{-1} chính là số 1/a ; tập con P là tập hợp những số thực dương; và định nghĩa a > b chính là a + (- b) là số dương.

12 tiên đề trên cho một trường thứ tự dù quen thuộc nhưng hơi truừu tượng và buồn tẻ nên không được dạy cho các học sinh trung học. Hãy thêm hai định nghĩa nữa.

Định nghĩa 3. Một phần tử a của S được gọi là *cận trên* của một tập con không rỗng M của S nếu ta có m < a hay m = a với mọi m của M.

Định nghĩa 3. Một phần tử a của S được gọi là *cận trên bé nhất* của một tập con không rỗng M của S nếu a là cận trên của M và a < b với mọi cận trên khác của M.

Bây giờ chúng ta định nghĩa một trường toàn thứ tự là một trường thứ tự và thỏa thêm tiên đề sau:

TĐ 13 (tiên đề về tính liên tục): Nếu một tập con không rỗng M của S có một cận trên, thế thì nó sẽ có một cận trên bé nhất.

29. SỰ GIẢI PHÓNG CỦA ĐẠI SỐ (2)

Hình học, như đã nói trong bài 27, đã bị xiềng xích vào tiên đề của Euclid cho đến khi Lobachevsky và Bolyai, trong 1829 và 1832, đã giải phóng nó khỏi sự lệ thuộc bằng cách thiết lập một môn hình học mới trong đó tiên đề Euclid không được công nhận. Với sự thành tựu này, một xác quyết ăn sâu đến hàng chục thế kỷ cho rằng chỉ tồn tại một môn hình học đã bị lung lay, và con đường đã được mở cho sự sáng tạo ra những môn hình học mới khác lạ.

Một câu chuyện tương tự cũng có thể kể về đại số. Các nhà toán học ở đầu thế kỷ 19 không thể quan niệm rằng có thể tồn tại một môn đại số khác với môn đại số mang tính số học. Chẳng hạn, nếu gặp một môn đại số mà trong đó tính giao hoán của phép nhân bị vi phạm, chắc chắn không ai có thể chấp nhận điều này và sẽ cho đó là khôi hài và sẽ loại bỏ nó ngay. Cảm giác đó đã được William Rowan Hamilton gặp phải khi trong năm 1843, ông bắt buộc, do những nhận định vật lí, sáng tạo ra môn đại số trong đó tính giao hoán của phép nhân không còn đúng nữa. Bước cực đoan là chấp nhận loại bỏ tính giao hoán không đến dễ dàng với Hamilton; nó chỉ dần hé mở với ông sau nhiều năm suy tư về một vấn đề đặc biệt.

Hãy xem động lực vật lý nằm đàng sau sự sáng tạo của Hamilton. Cách tiếp cận tốt nhất có lẽ là xét cách định nghĩa số phức của ông, một định nghĩa đẹp đẽ, xem số phức là một cặp số thực mà ông trình bày lần đâu tiên trước Viện Hàn Lâm Hoàng Gia Ái Nhĩ Lan. Đối với những nhà toán học cùng thời, cũng như đối với các học sinh cấp 3 ngày nay, số phức được định nghĩa như những số có dạng a + bi trong đó a, b là các số thực và i là số mà $i^2 = -1$, và các phép tính cộng, nhân, lũy thừa những số này được thực hiện như đối với các đa thức, rồi thay $i^2 = -1$. Từ đó, ta được các kết quả sau:

$(a + bi)(c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i$

Còn Hamilton định nghĩa số phức là cặp (a , b) các số thực và định nghĩa phép cộng, phép nhân:

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) (c, d) = (ac – bd, ad + bc)$

$(a, b) = (c, d) \iff a = c$ và $b = d$.

Dễ dàng với các định nghĩa này ta có thể chứng minh tập hợp các số phức tạo thành một trường trong đó số (0, 0) là phần tử zero và số (1, 0) là phần tử đơn vị của phép nhân.

Hệ thống số phức là công cụ tiện lợi trong việc nghiên cứu vectơ và phép quay trong mặt phẳng . Hamilton thử chế tạo một hệ thống tương tự để nghiên cứu vectơ và phép quay trong không gian. Qua nghiên cứu, ông thấy cần định nghĩa một bộ tứ (a, b, c, d) chứa trong đó tập hợp R và C các số thực và phức, được định nghĩa như sau:

- $(a, b, c, d) = (e, f, g, h) \iff a = e, b = f, c = g, d = h$
- $(a, b, c, d) + (e, f, g, h) = (a + e, b + f, c + g, d + h)$
- $(a, b, c, d) (e, f, g, h) = (ae – bf – cg – dh, af + be + ch – dg, ag + ce + df – bh, ah + bg + de – cf)$

Ta có thể chứng minh rằng với định nghĩa này, nếu coi số thực m là (m, 0, 0, 0) và số phức (a, b) là (a, b, 0, 0) thì các phép tính đối với số thực và số phức đều được bảo toàn trong tập hợp mới này. Ta cũng chứng minh được phép cộng các bộ tứ có tính giao hoán và kết hợp, phép nhân các bộ tứ kết hợp và có tính phân phối đối với phép cộng. Nhưng tính giao hoán của phép nhân thì không còn đúng nữa.

Ví dụ: (0, 1, 0, 0) (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1) trong khi:

(0, 0, 1, 0) (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, - 1).

Sau nhiều năm suy tư không có kết quả, cuối cùng Hamilton chịu chấp nhận tính không giao hoán của phép nhân trong một buổi đi dạo dọc theo con sông trong một chiều hoàng hôn cùng với vợ. Đây là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TÓAN HỌC .

Trước khi khép lại bài này, chúng ta hãy tìm hiểu một đại số không giao hoán khác – đại số ma trận- sáng tạo bởi nhà toán học người Anh Arthur Cayley (1821-1895) vào năm 1857. Khái niệm ma trận đến với ông khi ông khảo sát các phép biên đổi tuyến tính thuộc dạng:

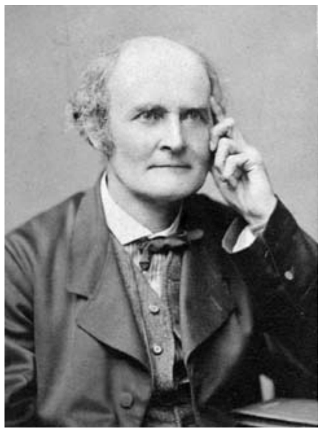
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

trong đó a, b, c, d là các số thực, (x ,y) là toạ độ của điểm M và (x’, y’) là toạ độ của M’, ảnh điểm M. Phép biến đổi trên được xác định bởi 4 hệ số a, b, c và d, do đó phép biến đổi coi như tượng trưng bởi bảng số:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gọi là *ma trận cấp 2*. Nếu ta thực hiện tiếp phép biến đổi cho điểm M’ để được ảnh M’’ cho bởi:

$$\begin{cases} x'' = ex' + fy' \\ y'' = gx' + hy' \end{cases}$$



thế thì ta có, bằng phép tính đại số :

$$\begin{cases} x'' = (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ y'' = (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{cases}$$

Từ đó ta có định nghĩa sau về tích của hai ma trận:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}$$

Phép cộng được định nghĩa bởi:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$$

Từ đó có thể chứng minh phép cộng có tính giao hoán, kết hợp và phép nhân có tính kết hợp và phân phối đối với phép cộng. Nhưng phép nhân không có tính giao hoán, như có thể thấy trong ví dụ sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

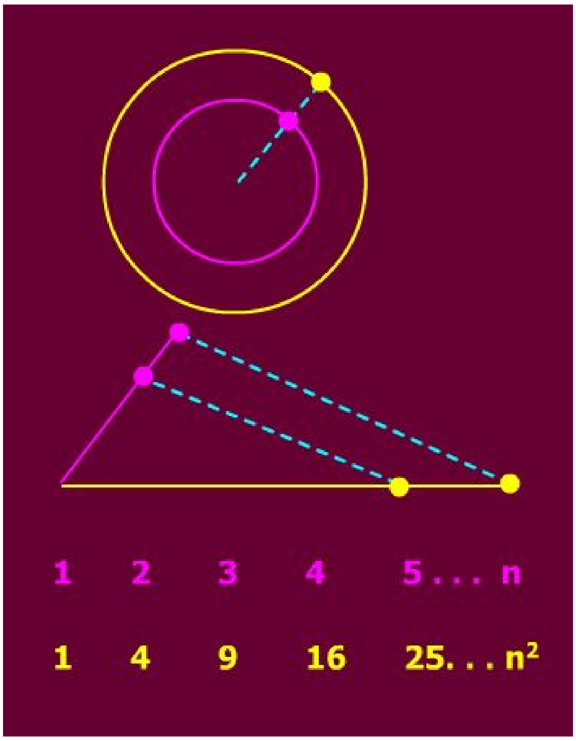
trong khi $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Người ta còn “chế tạo” thêm các đại số trong đó phép nhân không có tính kết hợp nhưng có tính giao hoán, và phép nhân không giao hoán lẫn không kết hợp.

Điều ngạc nhiên là bộ tứ của Hamilton một thời được chào đón như là một công cụ của các nhà vật lý tương lai, đã dần trở nên không gì khác hơn là một mẫu đồ cổ trong bảo tàng của toán sử, bởi vì nó đã được thay thế bởi một giải tích vectơ tinh tế hơn của nhà vật lý học và toán học Mỹ Josiah Willard Gibbs (1839-1903) của Đại học Yale. Trái lại, ma trận của Cayley đã phát triển và ngày nay trở thành một công cụ quan trọng và hữu dụng trong toán học. Tiếng tăm của bộ tứ nằm ở chỗ nó đã phá vỡ rào cản của đại số truyền thống, nghiễm nhiên khiến sự sáng tạo này là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TÓAN HỌC .

31. VƯỢT QUA HỮU HẠN

Các nhà toán học và triết gia, đã vật lộn với các khái niệm về vô cực và những tập hợp vô hạn từ những ngày xa xưa thời Hi lạp cổ đại. Nghịch lí của Zeno là một ví dụ sớm sủa của một vài khó khăn đã gặp phải. Một số người Hi lạp, như Aristotle và Proclus, chấp nhận sự kiện là một tập hợp có thể làm lớn hơn mải mải mà không hề bị chặn, nhưng từ chối sự tồn tại của một tập hợp hoàn tất (completed). Suốt thời Trung cổ các triết gia đã biện giải về vấn đề tiềm năng đối với thực thể của số vô cực. Cũng chú ý là sự so sánh giữa các số vô cực dẫn đến nghịch lí. Ví dụ, số điểm trên hai đường tròn đồng tâm là bằng nhau vì chúng có thể tương ứng một – một bằng cách liên kết các cặp điểm trên bán kính chung; trong khi độ dài đường tròn này lại dài hơn đường tròn kia.



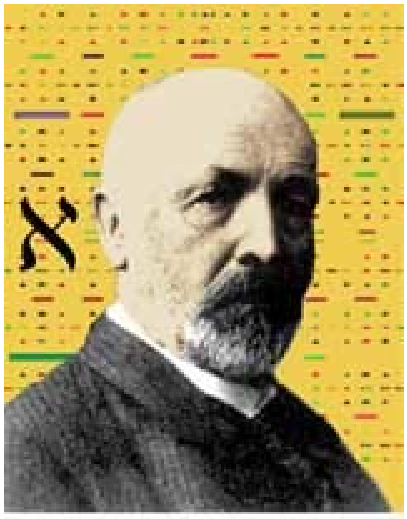
Galileo cũng vật lộn với những tập hợp vô hạn, và ông ta cũng thấy rằng tính chất hoàn tất của nó phải bị loại bỏ. Trong tác phẩm *Hai Khoa Học Mới* (1638), ông nhận xét rằng các điểm trên hai đoạn thẳng không bằng nhau có thể tương ứng một – một bằng một phép chiếu đơn giản từ đoạn này lên đoạn kia, và như thế chúng có cùng số điểm, mặc dù đoạn này dài hơn đoạn kia và do đó phải có nhiều điểm hơn đoạn kia.

Ông cũng nhận ra những số nguyên dương có thể tương ứng một – một với bình phương của chúng, mặc dù tập hợp những số chính phương chỉ là một bộ phận của tập hợp những số nguyên dương. Những nghịch lí gây bối rối này chỉ xuất hiện nếu ta giả định có sự tồn tại của những tập hợp vô hạn hoàn tất; để tránh nghịch lí, ta phải loại bỏ ý tưởng của một tập hợp vô hạn hoàn tất.

Gauss, trong một bức thư danh tiếng gởi Schumacher ngày 12/7/1831, nói : “Tôi chống lại cách sử dụng một đại lượng vô cùng như là một thực thể thực sự; điều này không hề được cho phép trong toán học. Vô cực chỉ là một cách nói, trong đó người ta đề cập đến những giới hạn mà một vài tỉ số có thể tiến gần đến đó như mong muốn, trong khi những tỉ số khác được phép tăng lên vô hạn.” Cauchy cùng với nhiều người khác cũng khước từ sự tồn tại của các tập hợp vô hạn hoàn tất vì do nghịch lí là những tập hợp như thế có thể tương ứng một-một với một tập con thực sự của chúng. Do đó, mặc dù các nhà toán học làm việc với những tập hợp vô hạn như chuỗi số vô hạn, số thực, số tự nhiên v.. v . . họ thường tránh né vấn nạn phiền toái ở đằng sau giả định là các tập hợp vô hạn hoàn tất tồn tại. Khi các nhà toán học cuối cùng phải đối mặt với vấn đề phải tạo cho giải tích tính nghiêm nhặt cần có, vấn nạn trên không còn có thể bỏ qua mà phải được giải quyết.

Bolzano (1781-1848) trong tác phẩm Những *Nghịch Lí Của Vô Cùng* in năm 1851, ba năm sau khi ông qua đời, là người đầu tiên đi những bước tích cực theo hướng công nhận sự tồn tại thực sự của tập hợp vô hạn. Ông cho rằng sự kiện một tập hợp vô hạn có thể tương ứng một –một với một bộ phận của nó phải được chấp nhận như một thực tế. Nhưng công trình của Bolzano về sự vô cùng, mặc dù là khai phá, nhưng lại thiên về triết lý hơn là toán học. Một nghiện cứu thực sự toán học về tập hợp vô hạn chỉ xuất hiện với công trình xuất sắc của Cantor vào cuối thế kỷ thứ 19.

Georg Cantor sinh trong gia đình người Đan Mạch ở St. Peterburg, Nga vào năm 1845, và chuyển về sống tại Đức vào năm 1856. Cha của Cantor là một người theo Do Thái Giáo sau đó cải theo đạo Tin Lành, còn mẹ là người Công giáo. Đứa con do đó sớm quan tâm sâu sắc đến thần học trung cổ, và quen thuộc với biện giải về tính liên tục và vô hạn. Kết quả là ông từ bỏ đề nghi của cha khuyến cáo theo nghề kỹ sư để chuyên tâm vào triết lý, vật lý và toán học. Ông theo học ở Zurich, Gottingen và Berlin (tại đây ông chịu ảnh hưởng của Weierstrass và cũng tại đây ông nhận bằng tiến sĩ vào năm 1869). Sau đó ông theo nghề dạy học trong một thời gian dài tại Đại học Halle từ 1869 đến 1905. Ông chết trong nhà thương tâm thần ở Halle năm 1918.



Georg Cantor

Mối quan tâm ban đầu của Cantor là lý thuyết số, các phương trình dạng vô định, chuỗi số lượng giác. Lý thuyết tinh tế của chuỗi lượng giác đã tạo cho ông cảm hứng đi sâu nghiên cứu nền tảng của giải tích. Ông khai sinh số vô tỉ như là giới hạn của một dãy số hữu tỷ, khác xa với cách Dedekind định nghĩa bằng phép cắt lấy cảm hứng từ hình học- và đến năm 1874 bắt đầu công trình cách mạng về lý thuyết tập hợp và về số vô cùng. Với công trình thứ hai này, Cantor đã sáng tạo một lãnh vực nghiên cứu toán học hòan toàn mới. Trong tác phẩm của mình, ông phát triển một lý thuyết về những số siêu hạn (transfinite), dựa trên luận thuyết toán học về sự vô cùng thực sự, và tạo ra số học về những số siêu hạn tương tự như số học về những số hữu hạn.

Cantor rất sùng đạo, và công trình của ông, theo một nghĩa nào đó, coi như tiếp nối sự biện bác liên hệ với các nghịch lí của Zeno, phản ảnh sự trân trọng của ông với những chiêm nghiệm kinh viện trung cổ về bản chất của vô cùng. Những quan điểm của ông gặp sự chống đối chủ yếu từ Kronecker (1823-1891) ở Đại học Berlin, và chính Kronecker đã từ chối kịch liệt mọi nỗ lực của Cantor xin một chân giảng dạy tại Đại học lừng danh này. Ngày nay, lý thuyết tập hợp của Cantor đã xâm nhập mọi ngành toán học và chứng tỏ đặc biệt quan trọng trong vị tướng học (topology) và nền tảng của lý thuyết hàm thực.

Ta gọi số phần tử của một tập hợp hữu hạn là *chính số* của nó. Như vậy số các chính số của tập hợp hữu hạn đồng nhất với các số tự nhiên. Các chính số của tập hợp vô hạn được gọi là những *số siêu hạn.* Cantor phát triển lý thuyết của ông về số siêu hạn xuất hiện trong một loạt các bài viết nổi tiếng từ năm 1874 đến 1895 và phần lớn in trong tập san toán học Đức Mathematicsche Annalen và Journal fur Mathematik.
Trước các nghiên cứu của Cantor, các nhà toán học chỉ biết đến một số vô cực, kí hiệu ∞, và kí hiệu này được dùng chung để biểu thị " số" các phần tử trong các tập hợp như tập hợp mọi số tự nhiên, tập hợp mọi số thực, và tập hợp mọi điểm trên đoạn thẳng. Qua công trình của Cantor, một tầm nhìn mới mẻ và bao quát được giới thiệu, và một kích cỡ số học mới được thành tựu. Vì tính táo bạo phi thường của các ý tưởng trong công trình của Cantor, và vì một số các phương pháp chứng minh độc đáo của chúng mà lý thuyết các số siêu

hạn của Cantor có sức lôi cuốn mạnh mẽ. Đây chính là MỘT THỜI KHẮC TRỌNG ĐẠI CỦA TÓAN HỌC. Chúng ta hãy tìm hiểu ngắn gọn lý thuyết đáng nể này.

Chúng ta bắt đầu bằng khái niệm tương đương của hai tập hợp, đó là hai tập hợp mà ta có thể tương ứng một – một các phần tử của chúng. Ví dụ tập hợp A = { 0; 1 ; 2 ; 7} các số tự nhiên và tập hợp B = {*; @ ; % ; &} các kí hiệu là hai tập hợp tương đương, vì ta có thể tương ứng 0 ↔ *, 1 ↔ @, 2 ↔ % và 7 ↔ &. Nếu hai tập hợp là hữu hạn như trong trường hợp trên, rõ ràng chúng tương đương khi và chỉ khi chúng có số phần tử bằng nhau, hay ta gọi là có cùng chính số : n(A) = n(B) = 4. Nếu ta áp dụng nguyên tắc trên cho các tập hợp vô hạn, thì sẽ gặp các kết quả thú vị không ngờ. Như Galileo quan sát thấy rằng, nếu dùng tương ứng $n \leftrightarrow n^2$, thì kết quả là tập hợp mọi số chính phương thì tương đương với tập hợp mọi số nguyên dương, và như thế ta phải nói chúng có cùng chính số, và theo quan điểm này, ta có quyền nói số các số chính phương "bằng" với số các số nguyên dương. Kết quả là tiên đề Euclid nói rằng toàn phần thì lớn hơn thành phần không còn đúng khi nói về chính số của các tập hợp vô hạn.

Chúng ta kí hiệu chính số của tập hợp mọi số tự nhiên bằng d (Cantor thì kí hiệu chính số này bằng $\aleph_0$ (đọc là aleph không), và bảo rằng một tập hợp có chính số này là tập hợp đếm được. Như vậy ta nói có d số chính phương, có d số tự nhiên, giống như ta nói tập hợp A, B ở trên có 4 phần tử. Và suy ra rằng một tập hợp S gọi là *đếm được* khi và chỉ khi các phần tử của chúng có thể liệt kê dưới dạng dãy số $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$. Vì bất kì tập hợp vô hạn nào cũng có chưá một tập con đếm được nên d chính là số siêu hạn "nhỏ nhất".

Trong các bài viết đầu tiên của mình, Cantor chứng minh hai tập hợp quan trọng sau đây là đếm được, mà thoạt nhìn chúng ta không thể tin được.

Tập hợp đầu tiên là tập hợp các số hữu tỷ. Tập hợp này có tính *dày đặc*, có nghĩa là giữa hai số hữu tỷ phân biệt tồn tại một số hữu tỷ khác- đúng ra là tồn tại vô số số hữu tỷ khác. Ví dụ:

- giữa số 0 và 1 có những số hữu tỷ sau: ½, 2/3, ¾, 4/5, 5/6 , . . ., n/(n+1) . . .
- giữa 0 và ½ có những số hữu tỷ 1/3, 2/5, 3/7, 4/9, 5/11, . . . , n/(2n +1), . . .
- giữa 0 và 1/3 có những số hữu tỷ 1/4, 2/7, 3/10, 4/13, 5/16, . . . , n/(3n +1), . .

và cứ thế.

Vì tính chất này, ta có thể tin rằng số siêu hạn của tập hợp những số hữu tỷ chắc phải lớn hơn d. (Nhớ rằng chính số của tập hợp A gọi là lớn hơn chính số của tập hợp B khi và chỉ khi B tương đương với một tập con thực sự của A, còn A thì không tương đương với bất cứ tập con nào của B). Can tor chứng tỏ rằng thật ra không phải như vậy, mà ngược lại tập hợp các số hữu tỷ là *đếm được*. Cách chứng minh của ông thật thú vị, được trình bày như sau.

ĐỊNH LÍ. Tập hợp các số hữu tỷ thì đếm được.

CM: Xét các dãy số

1	2	3	4 . . .
1/2	2/2	3/2	4/2 . . .
1/3	2/3	3/3	4/3 . . .
1/4	2/4	3/4	4/4 . . .
…	…	…	. . .

trong đó dãy thứ 1 chứa những số tự nhiên theo thứ tự lớn dần (đó là những phân số dương có mẫu là 1); dãy thứ 2 chứa những phân số dương có mẫu là 2 theo thứ tự lớn dần, . . . , dãy thứ n chứa những phân số dương có mẫu là n theo thứ tự lớn dần. . .v ….v. . . . Dễ thấy là tất cả số hữu tỷ đều có mặt trong bảng này, và nếu ta liệt kê các số này theo thứ tự cho bởi mũi tên, bỏ đi những số đã xuất hiện rồi, chúng ta sẽ được một dãy số vô hạn: 1, 2, ½, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, ¼, . . .

trong đó mỗi số hữu tỷ dương xuất hiện một và chỉ một lần. Gọi dãy số này là $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$, thế thì dãy số $\{0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \ldots\}$ chứa tất cả những số hữu tỷ. Vậy tập hợp các số hữu tỷ thì đếm được.

Tập hợp thứ hai mà Cantor đề cập đến còn lớn hơn tập hợp những số hữu tỷ. Hãy bắt đầu bằng định nghĩa.

ĐỊNH NGHĨA 1. Một số phức được gọi là *số đại số* nếu nó là nghiệm của một phương trình đa thức

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

trong đó $a_o \neq 0$ và mọi hệ số a_i đều nguyên. Một số phức không đại số gọi là *số siêu việt.*

Dễ thấy các số đại số bao gồm mọi số hữu tỷ và mọi căn thức của các số đó. Vậy mà ta có định lí sau, không thể không lấy làm ngạc nhiên:

ĐỊNH LÍ 2. Tập hợp mọi số đại số thì đếm được.

CM: Gọi f(x) là đa thức có dạng của định nghĩa 1 ở trên, không mất tính tổng quát, có thể giả sữ $a_0 > 0$. Xét chiều cao h của đa thức, là số định bởi:

$$h = n + a_0 + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

Hiển nhiên, h là một số nguyên ≥ 1, và rõ ràng là chỉ có một số hữu hạn đa thức có chiều cao h cho trước, và do đó chỉ có một số hữu hạn số đại số phát xuất từ các đa thức có chiều cao cho trước. Như vậy, chúng ta có thể liệt kê mọi số đại số, loại bỏ những số lặp lại nếu có, xuất phát từ các đa thức có chiều cao 1, rồi tiếp theo xuất phát từ các đa thức có chiều cao 2, và cứ thế. Do đó tập hợp các số đại số có thể liệt kê thành một dãy vô hạn; suy ra nó đếm được.

Theo như hai định lí vừa qua, có vẻ như là mọi tập hợp vô hạn đều đếm được. Thật ra điều đó không đúng, vì Cantor đã khẳng định:

ĐỊNH LÍ 3. Tập hợp mọi số thực trong khoảng (0 ; 1) thì không đếm được.

CM: Cách chứng minh này là phản chứng và sử dụng một phương pháp đặc biệt gọi là qui trình chéo Cantor. Giả sữ tập hợp này đếm được, thế thì chúng ta có thể liệt kê các số thực thành dãy $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$. Mỗi số p_i này có thể viết theo một cách duy nhất dưới dạng số thập phân vô hạn. Ở đây cũng cần nhắc lại là mọi số hữu tỷ đều có thể viết dưới dạng một số thập phân vô hạn tuần hoàn; ví dụ số 0,3 được viết thành 0,29999 . . . Chúng ta có thể liệt kê tập hợp này theo cách sau:

$p_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$

$p_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$

$p_3 = 0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$

…………………

trong đó a_{ij} là các chữ số thuộc {0, 1, 2, 3, . . ., 9}. Với cách liệt kê như thế, vẫn còn có số không thuộc dãy ấy, chẳng hạn đó là số có dạng $0,b_1b_2b_3\ldots$ trong đó $b_k \neq a_{kk}$ với k = 1, 2, 3, . . . Chẳng hạn:

$p_1 = 0,780\ldots$

$p_2 = 0,201\ldots$

$p_3 = 0,711\ldots$

………………….

ta lấy $b_1 \neq a_{11} = 7$, chọn $b_1 = 3$, $b_2 \neq a_{22} = 0$, chọn $b_2 = 1$, $b_3 \neq a_{33} = 1$, chọn $b_3 = 2$ . . .Như vậy số $0,b_1b_2b_3\ldots = 0,312\ldots$ là số thực thuộc khoảng (0 ; 1). Số này $\neq p_1$ vì chữ số $b_1 \neq a_{11}$, số này $\neq p_2$ vì chữ số $b_2 \neq a_{22}$, . . . Như vậy số $0,b_1b_2b_3\ldots$ này chắc chắn không có mặt trong dãy liệt kê ở trên vì nó khác p_k với mọi k. Điều này trái giả thiết, do đó tập hợp các số thực trên (0 ; 1) là không đếm được.

Từ định lí 2 và 3, Cantor suy ra kết quả quan trọng sau:

ĐỊNH LÍ 4. Các số siêu việt tồn tại.

CM: Thật vậy, theo định lí 3, tập hợp các số thực giữa 0 và 1 thì không đếm được, do đó tập hợp các số phức thì không đếm được. Nhưng theo định lí 2, tập hợp các số đại số là đếm được, như vậy phải tồn tại những số phức không phải là số đại số, và định lí được chứng minh.

Không phải nhà toán học nào cũng chấp nhận cách chứng minh định lí 3 và 4 ở trên. Sự không thể chấp nhận được hay không chấp nhận được của cách chứng minh trên nằm ở chỗ ta hiêu thế nào là tồn tại toán học. Môt số nhà toán học cho rằng sự tồn tại một vật thể toán học chỉ được khẳng định khi vật thể ấy được xác định và tạo ra. Còn định lí 4 ở trên không đưa ra một số siêu việt cụ thể nào nên không thể khẳng định sự tồn tại của số siêu việt. Vì không hài lòng với kết luận này, một số nhà toán học đã nỗ lực tìm cách chứng minh sự tồn tại số siêu việt bằng cách chỉ ra một số siêu việt cụ thể.

Chính Hermite (1822-1901), vào năm 1873, đã chứng minh được số e, cơ số của logarit tự nhiên, là một số siêu việt. Và Lindermann (1852-1939), trong năm 1882, lần đầu tiên đã chứng minh được số π cũng là số siêu việt. Số $2^{\sqrt{2}}$, gọi là số Hilbert, cũng là số siêu việt. Sau gần 30 năm nỗ lực, các nhà toán học chứng minh được những số có dạng a^b với a là số đại số khác 0, 1 , và b là số vô tỷ, (số Hilbert là một số như thế) là một số siêu việt.

Vì tập hợp những số thực thuộc (0 ; 1) thì không đếm được, nên chính số của tập hợp này là một số siêu hạn lớn hơn d. Chúng ta kí hiệu số này là c (Cantor gọi là số $\aleph_1$). Như vậy, ta có quyền nói "có c điểm trên đoạn [0 ; 1]", "có c điểm trên đoạn [a ; b] với mọi a < b" . . . . Người ta tin tưởng rằng c là số siêu hạn tiếp theo số d, có nghĩa là giữa hai số siêu hạn này không có số siêu hạn nào lớn hơn d mà nhỏ hơn c. Mối tin tưởng này được gọi là giả thuyết liên tục, nhưng mặc dù nhiều nỗ lực, chưa có chứng minh nào để khẳng định điều đó hay bác bỏ nó. Mải đến 1963, Cohen của Đại học Stanford mới chứng minh được giả thuyết này độc lập với các tiên đề về lý thuyết tập hợp.

Có tồn tại số siêu hạn nào lớn hơn số c không? Các nhà toán học đã chứng minh rằng tập hợp mọi hàm số thực f(x) xác định trên (0 ; 1) có chính số lớn hơn c (số $\aleph_2$). Hay nói khác đi có $\aleph_2$ đường cong vẽ trên mặt phẳng (đó là đồ thị của hàm số f nói trên). Ta vẫn chưa biết số $\aleph_2$ có phải là số siêu hạn tiếp theo số c hay không.

Và câu hỏi sau đây là đương nhiên: "Có còn số siêu hạn nào lớn hơn số $\aleph_2$ hay không ?" Và cũng chính Cantor trả lời là còn có vô hạn số siêu hạn, là hệ quả của định lí sau, goi là

Định lí Cantor: *Cho tập hợp X, gọi P(X) là tập hợp các tập con của X, thế thì chính số của P(X) lớn hơn chính số của X"*.